

УДК 530.12; 531.51

канд. фіз.-мат. наук Ф.Є. Хлистун,
Київський національний університет будівництва і архітектури.**ЗАПИС РІВНЯНЬ МАКСВЕЛЛА В КОВАРІАНТНІЙ ФОРМІ З
ВИКОРИСТАННЯМ ВЕКТОРА РІМАНА – ЗІЛЬБЕРШТЕЙНА.**

В роботі запропоновано новий метод коваріантного описання електромагнітного поля для будь якого ізотропного середовища через компоненти вектора Рімана-Зільберштейна.

Введемо в локальній точці простору, де знаходиться спостерігач, ортонормовану тетраду:

$$\eta_n^\alpha, \text{ де } \eta_n^\alpha \eta_m^\nu g_{\alpha\nu} = [1; -1; -1; -1] \quad (1)$$

($g_{\mu\nu}$ - метрика реального простору) і рознесемо її паралельно вздовж світлових геодезичних по всій досліджуваній області. Вектору, орієнтованому вздовж локального часу, відповідає нижній індекс нуль, а локальну часову координату будемо позначати x^0 . В якості параметра для чотирьохвимірному інтервалу оберемо час локального спостерігача, тоді:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = g_{\alpha\nu} dx^\alpha dx^\nu,$$

де c – швидкість світла в вакуумі; $u^0 = u_0 = dx^0/d\tau$; $u^n = -u_n = dx^n/d\tau$; $n = 1; 2; 3$. - компоненти швидкості в локальній системі відліку, при чому $u^n u_n = c^2$.

Для електромагнітного випромінювання $(ds)^2 = 0$. В цьому випадку u_0 - швидкість розповсюдження сигналу. В однорідному середовищі $u_0 = c/\sqrt{\epsilon\mu} \leq c$, де $\epsilon; \mu$ – характеризують електричну і магнітну проникність.

В локальній системі електромагнітне поле описують два тензори (дивись книгу [1], де найбільш повно відображені питання, причетні до нашої роботи), які в системі СІ мають вигляд (в рівняннях Максвелла в векторній формі необхідно замінити похідні по часу на похідні по x^0 : $dt = u_0^{-1} dx^0$):

$$f^{nm} = \begin{bmatrix} 0 & u_0 D_1 & u_0 D_2 & u_0 D_3 \\ -u_0 D_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ -u_0 D_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ -u_0 D_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{bmatrix}; \varphi^{nm} = \begin{bmatrix} 0 & E_1 u_0^{-1} & E_2 u_0^{-1} & E_3 u_0^{-1} \\ -E_1 u_0^{-1} & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 u_0^{-1} & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 u_0^{-1} & B_2 & -B_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

За допомогою символів Леві-Чевіти введемо для тензорів (2) дуальні:

$$\hat{f}^{nm} = \frac{1}{2} e^{nmkl} f_{kl}; \quad \hat{\phi}^{nm} = \frac{1}{2} e^{nmkl} \phi_{kl}; \quad e^{0123} = -e_{0123} = 1. \quad (3)$$

Щоб отримати ці тензори в довільних координатах, їх необхідно звернути з тетрадними векторами. Тоді рівняння Максвелла в коваріантній формі, а також сила Лоренца та рівняння неперервності для струму матимуть вигляд:

$$\Delta_\nu f^{\alpha\nu} = J^\alpha; \quad \Delta_\nu \hat{\phi}^{\alpha\nu} = 0; \quad f^\alpha = m_0 u^\nu \Delta_\nu u^\alpha = \phi^{\nu\alpha} J_\nu; \quad \Delta_\alpha J^\alpha = 0 \quad (4)$$

Тут $J^\alpha = \rho u^\alpha$ - компоненти чотирьохвимірної струму ($J^n J_n = \rho^2 c^2$), Δ_ν - коваріантна похідна, m_0 - маса спокою частинки, ρ - густина заряду.

Надалі обмежимося розглядом тільки ізотропних середовищ, для яких мають місце співвідношення: $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$; $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$; $\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$.

Враховуючи рівність: $u_0 = c / \sqrt{\epsilon \mu} \leq c$, легко переконатись, що між тензорами (2), а також відповідними дуальними тензорами, існує зв'язок:

$$\phi^{nm} = \mu \mu_0 f^{nm}; \quad \hat{f}^{nm} = (\mu \mu_0)^{-1} \hat{\phi}^{nm}; \quad (5)$$

Введемо тензор:

$$\Phi^{nm} = \frac{1}{\sqrt{2}} [f^{nm} + i(\mu \mu_0)^{-1} \hat{\phi}^{nm}] = \frac{1}{\sqrt{2}} [f^{nm} + i \hat{f}^{nm}]; \quad \hat{\Phi}^{nm} = -i \Phi^{nm} \quad (6)$$

Цікава властивість щодо його дуальності впливає з того що дуальний тензор від дуального дорівнює первісному тензору зі знаком мінус. Такі тензори будемо називати надалі самодуальними. Елементами цього тензора будуть компоненти вектора $\vec{z}$, який пропорційний вектору $\vec{F}$ що носить ім'я Рімана-Зільберштейна:

$$\vec{F} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\sqrt{\epsilon \epsilon_0} \vec{E} + i \sqrt{\mu \mu_0} \vec{H}]; \quad \vec{z} = (\sqrt{\mu \mu_0})^{-1} \vec{F} = \frac{1}{\sqrt{2}} [u_0 \vec{D} + i \vec{H}] \quad (7)$$

Зільберштейн ще в 1907 р. використав $\vec{F}$ для описання електромагнітних полів [2]. Вважаю за доцільне користуватись замість нього вектором $\vec{z}$ тому що вектори $\vec{D}$; $\vec{H}$ не мають розриву на границі середовищ (але u_0 на границі змінюється стрибком!). В зв'язку з викладеним пропоную вираз (6) називати тензором Рімана-Зільберштейна.

$$\Phi^{nm} = \begin{bmatrix} 0 & z_1 & z_2 & z_3 \\ -z_1 & 0 & -iz_3 & iz_2 \\ -z_2 & iz_3 & 0 & -iz_1 \\ -z_3 & -iz_2 & iz_1 & 0 \end{bmatrix}; \quad (8)$$

Рівняння Максвелла для тензора Рімана-Зільберштейна, з урахуванням (4), мають вигляд:

$$\Delta_\nu \Phi^{\alpha\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}} J^\alpha. \quad (9)$$

Можна показати, що:

$$\hat{f}^{\alpha\nu} \hat{f}_{\beta\nu} = f^{\alpha\nu} f_{\beta\nu} - \frac{1}{2} g_\beta^\alpha f^{\nu\mu} f_{\nu\mu}; \quad f^{\alpha\nu} \hat{f}_{\beta\nu} = \hat{f}^{\alpha\nu} f_{\beta\nu} = \frac{1}{4} g_\beta^\alpha f^{\mu\nu} \hat{f}_{\mu\nu} \quad (10)$$

Використавши ці формули, отримаємо дві можливі суми тензора $\Phi^{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} \Phi^{\alpha\nu} \Phi_{\beta\nu} &= \frac{1}{2} \left[f^{\alpha\nu} f_{\beta\nu} - \hat{f}^{\alpha\nu} \hat{f}_{\beta\nu} + i \left(f^{\alpha\nu} \hat{f}_{\beta\nu} + \hat{f}^{\alpha\nu} f_{\beta\nu} \right) \right] = \frac{1}{4} g_\beta^\alpha (I_1 + iI_2); \\ \Phi^{\alpha\nu} \tilde{\Phi}_{\beta\nu} &= \frac{1}{2} \left[f^{\alpha\nu} f_{\beta\nu} + \hat{f}^{\alpha\nu} \hat{f}_{\beta\nu} - i \left(f^{\alpha\nu} \hat{f}_{\beta\nu} - \hat{f}^{\alpha\nu} f_{\beta\nu} \right) \right] = f^{\alpha\nu} f_{\beta\nu} - \frac{1}{4} g_\beta^\alpha f^{\mu\nu} f_{\mu\nu} = -T_\beta^\alpha; \end{aligned} \quad (11)$$

Тут хвильова лінія над символом означає комплексну спряженість, а $I_1; I_2$ - інваріанти поля:

$$\begin{aligned} I_1 &= f^{\alpha\nu} f_{\alpha\nu} = (\mu\mu_0)^{-1} \varphi^{\alpha\nu} \varphi_{\alpha\nu} = 2 \left[-u_0^2 \vec{D}^2 + \vec{H}^2 \right]; \\ I_2 &= f^{\alpha\nu} \hat{f}_{\alpha\nu} = (\mu\mu_0)^{-1} \varphi^{\alpha\nu} \hat{\varphi}_{\alpha\nu} = \left[-2u_0 \vec{D} \vec{H} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

$T_\beta^\alpha = -\Phi^{\alpha\nu} \tilde{\Phi}_{\beta\nu}$ - тензор енергії-імпульсу електромагнітного поля з нульовим слідом, який має симетричний вигляд по тензорах Максвелла.

З наведеного випливає, що тензор $\Phi^{\alpha\beta}$ повністю описує електромагнітне поле. Тепер ми покажемо, що цей тензор особливо пристосований для описання електромагнітного випромінювання, для якого характерним є наявність поля фазових поверхонь, нормалі до яких ми називаємо світловими променями. Для прикладу запишемо фазову поверхню сферичної хвилі:

$$\Psi = \omega t - \vec{k} \vec{r}; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x^0} = \frac{\omega}{c} \frac{\partial t}{\partial x^0} = k_0 = k^0; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x^n} = -\vec{k} \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^n} = -k_n = k^n; \quad \sum_{n=0}^3 k_n k^n = 0 \quad (13)$$

де k_n - компоненти чотирьохвимірний хвильового вектора. Зв'яжемо з

градієнтом фазової поверхні тетраду таким чином, щоб $\frac{\partial \Psi}{\partial x^\nu} \eta_3^\nu = -k_0$; тоді з

ортонормованої тетради можна побудувати так звану світлову тетраду, запропоновану Ньюманом і Пенроузом [3]:

$$\lambda_{0\nu} = \frac{\partial \Psi}{\partial x^\nu} = k_0 (\eta_{0\nu} + \eta_{3\nu}); \quad \lambda_{3\nu} = \frac{1}{2k_0} (\eta_{0\nu} - \eta_{3\nu}); \quad \lambda_1^\nu = \frac{1}{\sqrt{2}} (\eta_1^\nu + i\eta_2^\nu) = \tilde{\lambda}_2^\nu; \quad (14)$$

Нижче наведено відмінні від нуля нормовочні коефіцієнти світлової тетради, а також вигляд метрики простору через таку тетраду:

$$\lambda_{0\nu}\lambda_3^\nu = -\lambda_{1\nu}\lambda_2^\nu = 1; \quad g^{\alpha\nu} = \lambda_0^\alpha\lambda_3^\nu + \lambda_0^\nu\lambda_3^\alpha - \lambda_1^\alpha\lambda_2^\nu - \lambda_1^\nu\lambda_2^\alpha; \quad (15)$$

З векторів світлової тетради можливо побудувати три і тільки три комплексних самодуальних бівектора:

$$V_1^{\alpha\nu} = \lambda_0^\alpha\lambda_1^\nu - \lambda_0^\nu\lambda_1^\alpha; \quad V_2^{\alpha\nu} = \lambda_3^\alpha\lambda_2^\nu - \lambda_3^\nu\lambda_2^\alpha; \quad V_3^{\alpha\nu} = \lambda_0^\alpha\lambda_3^\nu - \lambda_0^\nu\lambda_3^\alpha - \lambda_1^\alpha\lambda_2^\nu + \lambda_1^\nu\lambda_2^\alpha; \\ V_1^{\alpha\nu}V_{2\alpha\nu} = -2; \quad V_3^{\alpha\nu}V_{3\alpha\nu} = -4; \quad \hat{V}_b^{\alpha\nu} = -iV_b^{\alpha\nu}; \quad \tilde{V}_b^{\alpha\nu} = i\tilde{V}_b^{\alpha\nu}; \quad b = (1;2;3). \quad (16)$$

Розкладемо тензор Рімана-Зільберштейна по бівекторах (16):

$$\Phi^{\alpha\beta} = \sum_{b=1}^3 \varphi_b V_b^{\alpha\nu}; \quad \varphi_1 = \frac{1}{k_0\sqrt{2}}(z_1 - iz_2); \quad \varphi_2 = k_0\sqrt{2}(z_1 + iz_2); \quad \varphi_3 = -z_3; \quad (17)$$

$$I = \varphi_1\varphi_2 + (\varphi_3)^2 = \bar{z}^2 = -2^{-2}I_1 - i2^{-1}I_2 = u_0^2\vec{D}^2 - \vec{H}^2 + i2u_0\vec{D}\vec{H}.$$

Тут I -інваріант електромагнітного поля, параметри φ_b з індексами (1;2) характеризують поперечне поле, а φ_3 - повздовжнє.

Висновок. Застосування тензора Рімана-Зільберштейна дозволяє усунути проблему не симетрії тензора енергії-імпульсу електромагнітного поля, а також дає зручну форму описання випромінювання в ближній хвильовій зоні та в гравітаційних полях, де інваріанти поля відмінні від нуля [4].

Список літератури.

1. М.-А.Тоннела. Основы электромагнетизма и теории относительности. — М.: ИЛ. 1962 — 483 с.
2. L. Silberstein. Electromagnetische Grundgleichungen in bivectorieller Behandlung (нем.) // Annalen der Physik. — 1907. — Т. 22. — С. 579.
3. S. Hameroff, R. Penrose. "Orchestrated Objective Reduction of Quantum Coherence in Brain Microtubules: The "Orch OR" Model for Consciousness", 1996.
4. Ф.Е. Хлыстун. Ненулевое электромагнитное излучение в гравитационных полях. — Вестник Киевского университета. «Астрономия», 1981, вып. 23, 15-22.

Аннотация.

В работе предложен новый метод ковариантного описания электромагнитного поля для произвольной изотропной среды через компоненты вектора Римана-Зильберштейна.

Abstract.

The paper presents a new method of covariant description of electromagnetic field for any isotropic medium through components of the vector Riemann-Silberstein.