УДК 514.18
Скочко В. І., аспірант

ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПРУЖНОГО СЕРЕДОВИЩА, ЩО ПЕРЕБУВАЄ ПІД ДІЄЮ ЗАДАНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Київський Національний Університет Будівництва і Архітектури

Постановка проблеми. Створення точних та коректних із фізичної точки зору моделей пружного середовища, є широковідомою та актуальною проблемою сучасної інженерії. Це пов’язано зі швидким розвитком науково-технічного прогресу, і як наслідок із підвищенням рівня задач, що постають перед інженерами та науковцями в процесі дослідження фізичних явищ та процесів. Моделювання останніх часто вимагає подолання проблем спричинених високою геометричною складністю і масштабністю процесів. До таких процесів можна віднести, наприклад, деформацію та розвиток напружень у будівельних конструкціях, різноманітних машинах та механізмах, що перебувають під дією деякого навантаження. Одним із шляхів подолання вище зазначених проблем є застосування чисельних методів моделювання. Але і вони часто містять приховані похибки й неточності.

Аналіз основних досліджень. Найбільш розповсюдженим апаратом чисельного моделювання (на даний момент) являється метод скінченних елементів (МСЕ) [1]. Метод оснований на аналізі деякої глобальної функції, яка представляє досліджуване явище в усіх точках даної області. Ця область має бути попередньо розбита на скінченні суміжні підобласті, що називаються скінченними елементами. Шукана глобальна функція будується по частинам на кожному із цих елементів. Однак точність відтворення загальної картини процесу починає проявлятися лише при зростанні ступеню дискретизації досліджуваного об’єкту (або ділянки середовища), що є одним з не багатьох недоліків методу. Корінь проблеми виявляється у тому, що більшість досліджуваних явищ безпосередньо описуються диференціальними залежностями, а похибки накопичуються в процесі переходу від нескінченно малих часток середовища (в якому розвивається процес) до елементів із скінченними розмірами. При цьому середовище частково втрачає свої геометричні властивості, що небажано. Тому при моделюванні процесів високої геометричної та фізичної складності слід максимально точно підбирати геометричні інтерпретації окремих ділянок середовища, намагаючись при цьому досягти мінімальної дискретизації об’єкта у цілому.

В роботі [2] було оглядово розглянуто алгоритм, який дозволяє на основі статико-геометричного методу (СГМ) дискретної геометрії [3] відтворити напружено-деформований стан (НДС) пружного тіла, що перебуває під дією силового поля електричного струму. Загалом, механічна сила, яка впливає на кожну точку середовища, може бути представлена суперпозицією будь-яких польових структур або результуючим вектором суми зосереджених сил, прикладених в даній точці. Однак на практиці реалізація вище згаданого алгоритму ускладнюється у зв'язку із тим, що в основі СГМ лежить ідеалізована модель нерозтяжної нитки, яка дуже відчутно реагує на найменші зміни характеру її роботи (тільки стиск або розтяг). В наслідок цього в процесі ітераційного числення не завжди можна досягти заданої похибки. Окрім того, виникають не бажані осциляції пов'язані із топологічною специфікою сіткової конструкції. Відтак, уточнимо і скорегуємо цю модель, щоб зробити можливим її використання у сукупності із узагальненим законом Гука.

Основна частина. Модель нерозтяжної нитки (в'язі або стрижня) передбачає, що пружні деформації цієї нитки прямо пропорційні зусиллю, яке в ній виникає. Отже, справедливе співвідношення:

$$K_{i;j} = \pm |\bar{R}_{i;j}| / \delta_{i;j}, \tag{1}$$

де величина $K_{i;j}$ – це коефіцієнт пропорційності; $|\tilde{R}_{i;j}|$ – абсолютна величина зусилля у в'язі; $\delta_{i;j}$ – довжина в'язі що відповідає абсолютному видовженню; знак залежить від характеру роботи в'язі. Якщо дію сторонніх сил на нитку припинити, то (у відповідності до даної моделі) вона «стиснеться» в точку. Якщо ж нитка має деяку площу перерізу $A_{i;j}$, то зусилля у виразі (1), можна виразити через напруження у стрижні:

$$K_{i;j} = A_{i;j}E\left(\delta_{i;j} - \delta_{(i;j)0}\right) / \left(\delta_{i;j}\delta_{(i;j)0}\right), \tag{2}$$

де $\delta_{(i;j)0}$ – початкова довжина в'язі, а E – модуль пружності матеріалу. Але якщо $\delta_{(i;j)0}$ дорівнює нулю, то вираз (2) не має фізичного і математичного сенсу. Саме тому в даній моделі приймається припущення, що початкова довжина в'язі знаходиться із результуючою у такому співвідношенні:

$$\delta_{(i;j)0} = \delta_{i;j} / \left(1 + \delta_{i;j}\right). \tag{3}$$

Тоді, з урахуванням формул (2) і (3), одержуємо наступний вираз:

$$K_{i;j} = A_{i;j}E\left(\delta_{i;j} - \delta_{i;j} / \left(1 + \delta_{i;j}\right)\right) / \left(\delta_{i;j}\ \delta_{i;j} / \left(1 + \delta_{i;j}\right)\right) = A_{i;j}E\,. \tag{4}$$

Це вказує на те, що будь-який приріст внутрішнього зусилля від дії зовнішніх сил не залежатиме від початкового НДС стрижня! А значить, дана модель сумісна із законом Гука при роботі досліджуваного пружного середовища в межах пружних деформацій. Тепер стає очевидно, що для видовження (утворення) деякого стрижня S_iS_j із площею перерізу $A_{i;j}$ на відстань $\delta_{i;j}$ необхідно прикласти до нього зусилля, абсолютна величина якого становитиме:

$$|\bar{R}_{i;j}| = \pm K_{i;j}\delta_{i;j} = \pm A_{i;j}E\delta_{i;j}\,. \tag{5}$$

Перенесемо властивості нерозтяжного стрижня на деякий фрагмент тривимірного пружного тіла. Тоді для утворення елементарного прямокутного паралелепіпеда розмірами $\Delta h_x \times \Delta h_y \times \Delta h_z$, наділеного такими властивостями, знадобиться прикласти до деякої фігури, складеної із 3-х перпендикулярних прямокутних відсіків площин (із площами A_l, A_m, та A_n), зусилля величиною:

$$\overline{F}_x = A_l E \Delta h_x , \tag{6}$$

$$\overline{F}_y = A_m E \Delta h_y , \tag{7}$$

$$\overline{F}_z = A_n E \Delta h_z . \tag{8}$$

Нескладно помітити, що таке уявлення про утворення елементарного фрагменту дає можливість уникнути виникнення дотичних деформацій при початковому формоутворенні цього фрагменту. Тобто, при довантаженні будь-якої грані паралелепіпеда, він витягуватиметься у відповідному напрямку із проявом лише нормальних напружень. А тому деяке пружне середовище (ізотропне чи анізотропне) може бути відносно просто інтерпретоване тривимірною кубічною сіткою, утвореною шляхом розтягування вище описаних фігур.

Припустимо, що даним способом задано геометричну модель досліджуваного об'єкту, який виявляє пружні властивості. Однак вузли такої сітки відповідатимуть лише центрам ваги окремих фрагментів об'єкту (цю сітку, у відповідності із [2] називатимемо центральною сіткою і позначатимемо її вузли $S_{l;m;n}$). Для визначення форми кожного із фрагментів необхідно визначити положення вузлів додаткової – формоутворюючої сітки (вузли останньої позначатимемо як $T_{(l\pm 1/2u;m\pm 1/2v;n\pm 1/2w)}$, u, v, w – натуральні числа). Зв'язок між вузлами центральної та додаткової сітки відображатиметься системою:

$$\begin{aligned}
&8\cdot t_{(l+1/2);(m+1/2);(n+1/2)} + 4\cdot\begin{pmatrix} t_{(l+1/2);(m+1/2);(n+3/2)} + t_{(l+3/2);(m+1/2);(n+1/2)} + t_{(l+1/2);(m-1/2);(n+1/2)} + \\ + t_{(l-1/2);(m+1/2);(n-1/2)} + t_{(l+1/2);(m+3/2);(n+1/2)} + t_{(l+1/2);(m+1/2);(n-1/2)} \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} t_{(l+3/2);(m+1/2);(n+3/2)} + t_{(l+1/2);(m-1/2);(n+3/2)} + t_{(l-1/2);(m+1/2);(n+3/2)} + t_{(l+1/2);(m+3/2);(n+3/2)} + t_{(l+3/2);(m-1/2);(n+1/2)} + t_{(l-1/2);(m-1/2);(n+1/2)} + \\ + t_{(l-1/2);(m+3/2);(n+1/2)} + t_{(l+3/2);(m+3/2);(n+1/2)} + t_{(l+3/2);(m+1/2);(n-1/2)} + t_{(l+1/2);(m-1/2);(n-1/2)} + t_{(l-1/2);(m+1/2);(n-1/2)} + t_{(l+1/2);(m+3/2);(n-1/2)} \end{pmatrix} + \\
&+ 1\cdot\begin{pmatrix} t_{(l+3/2);(m-1/2);(n+3/2)} + t_{(l-1/2);(m-1/2);(n+3/2)} + t_{(l-1/2);(m+3/2);(n+3/2)} + t_{(l+3/2);(m+3/2);(n+3/2)} + \\ + t_{(l+3/2);(m-1/2);(n-1/2)} + t_{(l-1/2);(m-1/2);(n-1/2)} + t_{(l-1/2);(m+3/2);(n-1/2)} + t_{(l+3/2);(m+3/2);(n-1/2)} \end{pmatrix} - 8\cdot\begin{pmatrix} s_{(l+1;\,m;\,n+1)} + s_{(l;\,m;\,n+1)} + s_{(l;\,m+1;\,n+1)} + s_{(l+1;\,m+1;\,n+1)} + \\ + s_{(l+1;\,m;\,n)} + s_{(l;\,m;\,n)} + s_{(l;\,m+1;\,n)} + s_{(l+1;\,m+1;\,n)} \end{pmatrix} = 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Тут $s_{(l;m;n)} = \{x_{(l;m;n)}, y_{(l;m;n)}, z_{(l;m;n)}\}$ та $t_{(l\pm 1/2u;m\pm 1/2v;n\pm 1/2w)} = \{x_{(l\pm 1/2u;m\pm 1/2v;n\pm 1/2w)}, y_{(l\pm 1/2u;m\pm 1/2v;n\pm 1/2w)}, z_{(l\pm 1/2u;m\pm 1/2v;n\pm 1/2w)}\}$ – узагальнені позначення відповідних координат центральних і додаткових вузлів. Координати центрів ваги кожного з кубічних фрагментів визначатимуться наступною системою:

$$\begin{aligned}
&-\left(\aleph_{(l;m;n)(l+1;m;n)} + \aleph_{(l;m;n)(l-1;m;n)} + \aleph_{(l;m;n)(l;m+1;n)} + \aleph_{(l;m;n)(l;m-1;n)} + \aleph_{(l;m;n)(l;m;n+1)} + \aleph_{(l;m;n)(l;m;n-1)}\right)\cdot s_{(l;m;n)} + \\
&+ \aleph_{(l;m;n)(l+1;m;n)}\cdot s_{(l+1;m;n)} + \aleph_{(l;m;n)(l-1;m;n)}\cdot s_{(l-1;m;n)} + \aleph_{(l;m;n)(l;m+1;n)}\cdot s_{(l;m+1;n)} + \aleph_{(l;m;n)(l;m-1;n)}\cdot s_{(l;m-1;n)} + \\
&+ \aleph_{(l;m;n)(l;m;n+1)}\cdot s_{(l;m;n+1)} + \aleph_{(l;m;n)(l;m;n-1)}\cdot s_{(l;m;n-1)} = -\sum f_{s(l;m;n)} - F_{s(l;m;n)},
\end{aligned} \tag{10}$$

де $\Sigma f_{s(l;m;n)}$ – сума механічних сил, які прикладено до центру ваги даного фрагменту (до вузла $S_{l;m;n}$); $F_{s(l;m;n)}$ – компонент початкового формоутворюючого зусилля; $\aleph_{i;j}$ – параметр жорсткості умовної в’язі (яка з’єднує вузли S_i та S_j), що у початковому напруженому стані дорівнює коефіцієнту пропорційності $K_{i;j}$, проте в процесі довантаження не зберігає пропорційної закономірності між довжиною стрижня $\delta_{i;j}$ і зусиллям у ньому, так як перерозподіл зусиль у стрижнях має на всіх наступних етапах (окрім першого) ітераційного числення визначатись законом Гука. Очевидно, що зміна зусиль у стрижнях має обумовлюватись зміною форми граней додаткової сітки і як наслідок зміною напружень на поверхні цих граней.

В роботі [4] було показано процес дискретизації кожної із граней елементарних фрагментів утворених додатковою сіткою. У відповідності до [4] кожна грань розбивається на трикутні відсіки площини. Маючи таке дискретне розбиття до і після довантаження і деформації, а також габарити елементарних фрагментів у попередньо напруженому стані, можна розрахувати напруження, що виникають у кожному трикутному відсіку і середні напруження по кожній грані. Розглянемо цей процес детальніше.

Візьмемо деякий трикутний фрагмент ABC площини ω загального положення, що інтерпретує плоский переріз досліджуваного пружного середовища із відомими фізико-механічними показниками. Нехай в результаті довільного руху площини ω вершини трикутника $A^*B^*C^*$ змінюють своє положення переходячи в трикутний фрагмент ABC. Рух даного трикутника розглядатимемо відносно деякого елементарного фрагменту досліджуваного середовища. Спроектуємо дану грань у початковому ($A^*B^*C^*$) та результуючому (ABC) положенні на координатні площини $\prod_{YOZ}$, $\prod_{XOZ}$ та $\prod_{XOY}$ (рис.1.). Якщо площу грані ABC позначити як Θ то площі проекцій на координатні площини відповідно становитимуть $\cos\alpha\Theta$, $\cos\beta\Theta$ та $\cos\varphi\Theta$, де

$$\cos\alpha = \cos\left(\nu \,\hat{,}\, X\right),\ \cos\beta = \cos\left(\nu \,\hat{,}\, Y\right),\ \cos\varphi = \cos\left(\nu \,\hat{,}\, Z\right),$$

– це косинуси кутів між нормаллю ν до площини ABC та координатними осями. Для того, щоб визначити величини $\cos\alpha$, $\cos\beta$ та $\cos\gamma$, запишемо рівняння площини ω, що проходить через точки A, B і C:

$$\left(X - x_A\right)a + \left(Y - y_A\right)b + \left(Z - z_A\right)c = 0\,, \qquad (11)$$

де:

$$a = \left[\left(y_B - y_A\right)\left(z_C - z_A\right) - \left(y_C - y_A\right)\left(z_B - z_A\right)\right], \qquad (12)$$

$$b = \left[\left(x_C - x_A\right)\left(z_B - z_A\right) - \left(x_B - x_A\right)\left(z_C - z_A\right)\right], \qquad (13)$$

$$c = \left[\left(x_B - x_A\right)\left(y_C - y_A\right) - \left(x_C - x_A\right)\left(y_B - y_A\right)\right]. \qquad (14)$$

Для будь-якої іншої точки $M(x_M;\ y_M;\ z_M)$ даної площини ω рівняння останньої аналогічно записуватиметься так:

$$\left(X - x_M\right)a + \left(Y - y_M\right)b + \left(Z - z_M\right)c = 0\,. \qquad (15)$$

Тоді матимемо наступні напрямні косинуси нормалі ν до площини ABC:

$$\cos\alpha = a/|\nu|\,,\quad \cos\beta = b/|\nu|\,,\quad \cos\varphi = c/|\nu|\,, \qquad (16)$$

де $$|\nu| = \left(a^2 + b^2 + c^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

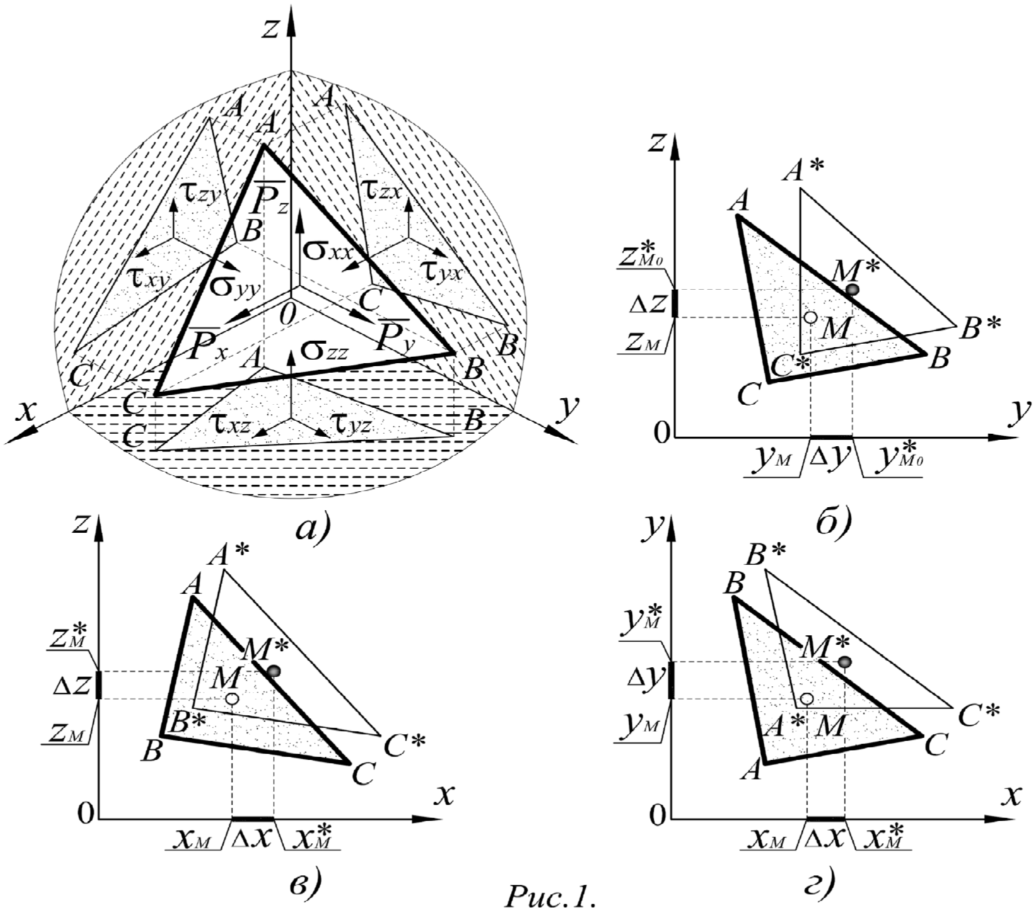


Рис.1.

Повертаючись тепер до розгляду проекцій грані *ABC* на координатні площини, зазначимо, що на кожній із цих проекцій діятимуть нормальні та дотичні напруження, а саме:

– в площині $\prod_{YOZ}$: $\sigma_{xx},\ \tau_{yx},\ \tau_{zx}$;

– в площині $\prod_{XOZ}$: $\tau_{xy},\ \sigma_{yy},\ \tau_{zy}$;

– в площині $\prod_{XOY}$: $\tau_{xz},\ \tau_{yz},\ \sigma_{zz}$.

Нехай вектор шуканого повного напруження по грані *ABC* становить:

$$\overline{P}_{ABC} = P_{(ABC)x} \cdot \overline{i} + P_{(ABC)y} \cdot \overline{j} + P_{(ABC)z} \cdot \overline{k}. \tag{17}$$

Тоді векторні складові даного напруження виражатимуться через нормальні та дотичні напруження, які діють в площинах проекцій грані *ABC* на координатних площинах. Одержимо:

$$P_{(ABC)x} = \sigma_{xx} \cdot \cos\alpha + \tau_{xy} \cdot \cos\beta + \tau_{xz} \cdot \cos\varphi, \tag{18}$$

$$P_{(ABC)y} = \tau_{yx} \cdot \cos\alpha + \sigma_{yy} \cdot \cos\beta + \tau_{yz} \cdot \cos\varphi, \tag{19}$$

$$P_{(ABC)z} = \tau_{zx} \cdot \cos\alpha + \tau_{zy} \cdot \cos\beta + \sigma_{zz} \cdot \cos\varphi. \tag{20}$$

Для визначення нормальних та дотичних напружень, які входять до складу формул (19) – (21), скористаємося узагальненим законом Гука в формі Ляме, що виявляє залежність між напруженнями та відносними лінійними ($\varepsilon_{i;j}$) і кутовими ($\gamma_{i;j}$) деформаціями:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = 2G \cdot \varepsilon_{xx} + \lambda\Delta,\ \tau_{xy} = \tau_{yx} = G \cdot \gamma_{xy} = G \cdot \gamma_{yx}, \\ \sigma_{yy} = 2G \cdot \varepsilon_{yy} + \lambda\Delta,\ \tau_{xz} = \tau_{zx} = G \cdot \gamma_{xz} = G \cdot \gamma_{zx}, \\ \sigma_{zz} = 2G \cdot \varepsilon_{zz} + \lambda\Delta,\ \tau_{yz} = \tau_{zy} = G \cdot \gamma_{yz} = G \cdot \gamma_{zy}. \end{cases} \tag{21}$$

Де:

$$\Delta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}\ , \tag{22}$$

– це наближене значення об’ємної деформації;

$$\lambda = 2\mu G \cdot (1 - 2\mu)^{-1}, \tag{23}$$

– це пружна стала Ляме;

$$G = E \cdot (2(1+\mu))^{-1}\ , \tag{24}$$

– модуль зсуву матеріалу даного тіла.

Тут: E – модуль пружності матеріалу; μ - коефіцієнт Пуассона.

Оскільки площадка ABC має скінченні розміри і площу, то, говорячи про визначення напружень по даній грані, ми матимемо на увазі розрахунок напружень в деякій конкретній точці цієї площадки. Напруження в цій точці мають відображати деякі середні показники по усій досліджуваній ділянці. Тому в подальшому користуватимемось припущенням, що такою точкою може слугувати центр ваги M даної ділянки, координати якої для результуючого (напруженого) положення становитимуть:

$$x_M = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C), y_M = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C),\ z_M = \frac{1}{3}(z_A + z_B + z_C). \tag{25}$$

Відповідно координати центру ваги площадки у початковому положенні (M*) визначатимуться за формулами:

$$x_M^* = \frac{1}{3}(x_A^* + x_B^* + x_C^*),\ y_M^* = \frac{1}{3}(y_A^* + y_B^* + y_C^*),\ z_M^* = \frac{1}{3}(z_A^* + z_B^* + z_C^*). \tag{26}$$

Маючи координати усіх необхідних точок, можемо визначити відносні деформації проекцій площадки ABC. Відносні лінійні деформації визначатимуться за формулами:

$$\varepsilon_{xx} = (x_M - x_M^*)/\Delta h_x\ ; \tag{27}$$

$$\varepsilon_{yy} = (y_M - y_M^*)/\Delta h_y\ ; \tag{28}$$

$$\varepsilon_{zz} = (z_M - z_M^*)/\Delta h_z\ . \tag{29}$$

Відносні кутові деформації становитимуть:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = (x_M - x_M^*)/\Delta h_y + (y_M - y_M^*)/\Delta h_x\ ; \tag{30}$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = (x_M - x_M^*)/\Delta h_z + (z_M - z_M^*)/\Delta h_x\ ; \tag{31}$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = (y_M - y_M^*)/\Delta h_z + (z_M - z_M^*)/\Delta h_y\ . \tag{32}$$

Виконуючи підстановку компонентів системи (21) до виразів (17) – (20), одержимо значення складових повного напруження по даній трикутній площадці ABC. Помноживши компоненти правої половини рівності (18) на площу даного трикутника Θ, отримаємо вектор повного зусилля, що діє на поверхні досліджуваного трикутного відсіку грані конструкції:

$$\overline{F}_{ABC} = \Theta \cdot \overline{P}_{ABC} = \Theta \cdot P_{(ABC)x} \cdot \bar{i} + \Theta \cdot P_{(ABC)y} \cdot \bar{j} + \Theta \cdot P_{(ABC)z} \cdot \bar{k}\,. \quad (33)$$

Визначимо тепер, яка частка повного зусилля спроектується на деякий напрямок S_iS_j, що визначатиметься заданням додаткової точки – вузла $S_j(x_j;\ y_j;\ z_j)$ (вважатимемо, що початкова точка даного напрямку $S_i(x_i;\ y_i;\ z_i)$ – це центр ваги даного елементарного фрагменту в деформованому стані). В такому випадку напрямні косинуси відрізку S_iS_j становитимуть:

$$\cos\vartheta = \cos\left(S_i\hat{S_j};\, X\right) = \left(x_j - x_i\right) \Big/ \left(\left(x_j - x_i\right)^2 + \left(y_j - y_i\right)^2 + \left(z_j - z_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\cos\varsigma = \cos\left(S_i\hat{S_j};\, Y\right) = \left(y_j - y_i\right) \Big/ \left(\left(x_j - x_i\right)^2 + \left(y_j - y_i\right)^2 + \left(z_j - z_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (34)$$

$$\cos\xi = \cos\left(S_i\hat{S_j};\, Z\right) = \left(z_j - z_i\right) \Big/ \left(\left(x_j - x_i\right)^2 + \left(y_j - y_i\right)^2 + \left(z_j - z_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тоді вектор зусилля, спрямованого вздовж осі S_iS_j, становитиме:

$$\overline{F}_{ij} = F_{(ij)x} \cdot \bar{i} + F_{(ij)y} \cdot \bar{j} + F_{(ij)z} \cdot \bar{k}\,, \quad (35)$$

де векторні компоненти цієї сили дорівнюватимуть:

$$F_{(ij)x} = \cos\vartheta \cdot \Theta \cdot P_{(ABC)x}\,, \quad (36)$$

$$F_{(ij)y} = \cos\varsigma \cdot \Theta \cdot P_{(ABC)y}\,, \quad (37)$$

$$F_{(ij)z} = \cos\xi \cdot \Theta \cdot P_{(ABC)z}\,. \quad (38)$$

Сума таких зусиль, підрахована для всієї грані, відображатиме зміну величини зусилля у деякому стрижні S_iS_j центральної сітки. Тоді на наступному кроці ітераційного числення параметр жорсткості даної в’язі дорівнюватиме відношенню абсолютної величини зусилля у деформованій на цьому етапі в’язі (з урахуванням приросту напружень) до довжини стрижня на цьому ж етапі. Тобто:

$$\aleph_{i;j}^{p+1} = \left|\, \overline{R}_{i;j}^{p} \,\right| \Big/ \delta_{i;j}^{p}\,, \text{ де} \quad (39)$$

$$\overline{R}_{i;j}^{p} = \left(R_{(ij)x}^{0} + F_{(ij)x}^{p}\right) \cdot \bar{i} + \left(R_{(ij)y}^{0} + F_{(ij)y}^{p}\right) \cdot \bar{j} + \left(R_{(ij)z}^{0} + F_{(ij)z}^{p}\right) \cdot \bar{k}\,. \quad (40)$$

Тут індекс p – відповідає порядковому номеру ітераційного числення; $R^{0}_{(i;j)s}$ – компоненти вектора початкових формоутворюючих зусиль.

Слід звернути увагу на те, що початковим положенням всіх точок елементарного фрагмента (в процесі обчислення напружень) слід вважати не його координати у попередньо-напруженому стані, а таке його положення, яке передбачатиме можливість довільного переміщення даного фрагменту у складі оточуючого деформованого середовища, але без деформацій граней власне даного фрагменту! Тому, для одержання початкового положення граней фрагменту, виконаємо перенос точок попередньо напруженого фрагменту у центр ваги вже деформованого, а також три повороти на кути зміщення векторів зусиль у попередньо напруженому і деформованому довантаженому станах стрижнів (рис.2.). Для цього скористаємося матричними перетвореннями вектор-стовпців координат попередньо напружених фрагментів [5].

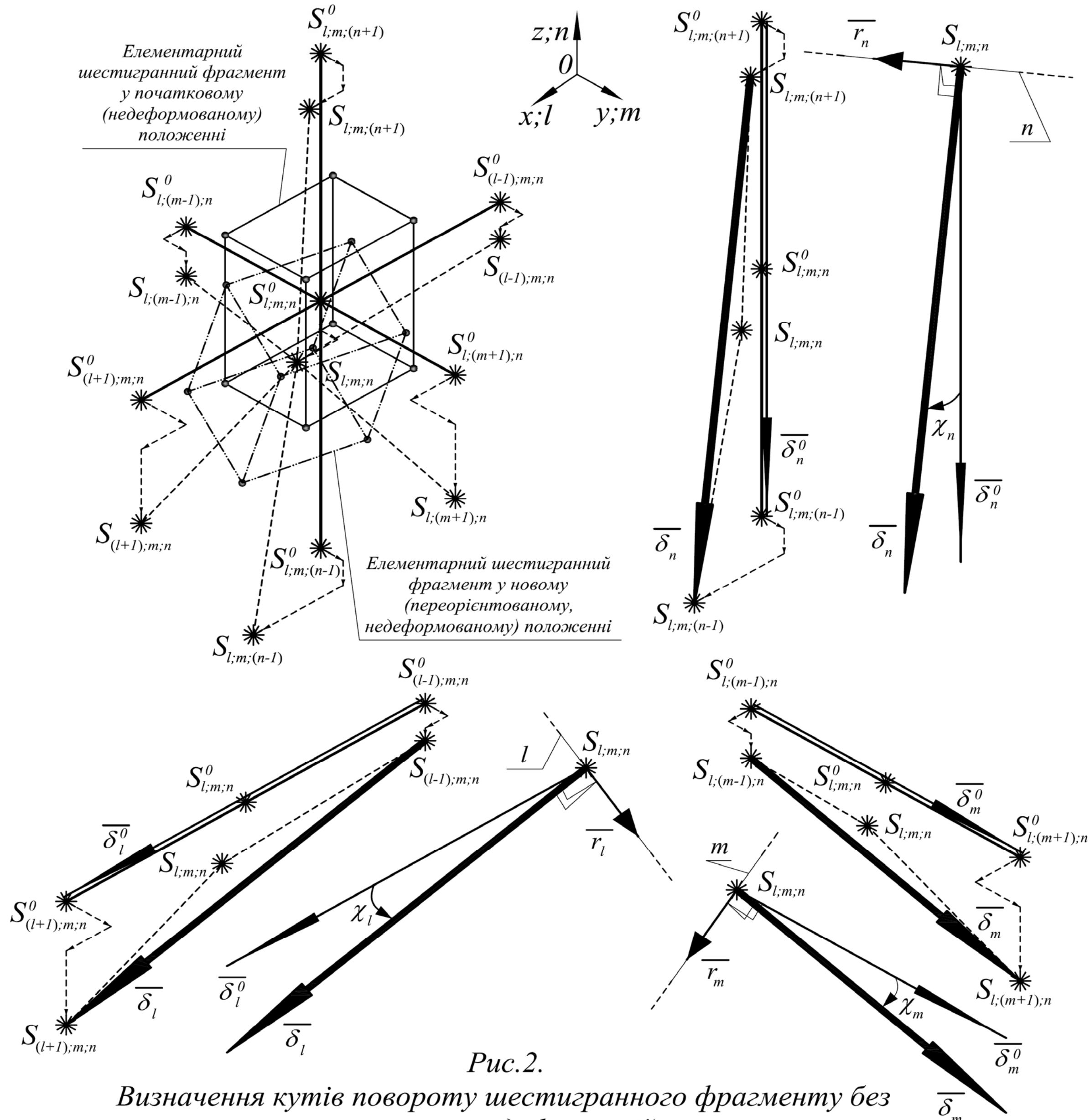


Рис.2.
Визначення кутів повороту шестигранного фрагменту без урахування деформацій.
✳ - вузли центральної сітки; ● - вузли додаткової сітки.

Якщо $\boldsymbol{X_0}$ – вектор початкових однорідних [5] координат, а $\boldsymbol{M}$ – матриця перетворення, то результуючий початковий стан визначатиметься наступним виразом:

$$\boldsymbol{X}_0^* = \boldsymbol{X}_0\boldsymbol{M}. \quad (41)$$

Матриця перетворення визначатиметься так:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{T}_{l;m;n}\boldsymbol{M}_l\boldsymbol{M}_m\boldsymbol{M}_n. \quad (42)$$

Тут $\boldsymbol{M}_q$ – матриці повороту стрижнів по напрямках l, m та n ($q= l,m,n$):

$$\boldsymbol{M}_q = \boldsymbol{T}\boldsymbol{R}_{qx}\boldsymbol{R}_{qy}\boldsymbol{R}_{q\chi}\boldsymbol{R}_{qy}^{-1}\boldsymbol{R}_{qx}^{-1}\boldsymbol{T}^{-1}, \quad (43)$$

компоненти яких мають наступний вигляд:

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_{l;m;n} & -y_{l;m;n} & -z_{l;m;n} & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R}_{qx} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\eta_q & \sin\eta_q & 0 \\ 0 & -\sin\eta_q & \cos\eta_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{R}_{qy} = \begin{pmatrix} \cos(-\lambda_q) & 0 & -\sin(-\lambda_q) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(-\lambda_q) & 0 & \cos(-\lambda_q) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R}_{q\chi} = \begin{pmatrix} \cos\chi_q & \sin\chi_q & 0 & 0 \\ -\sin\chi_q & \cos\chi_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

де (для напрямку l, наприклад):

$$\cos\chi_l = \left(\overline{\delta_l} \cdot \overline{\delta_l^0}\right) / \left(\left|\overline{\delta_l}\right| \cdot \left|\overline{\delta_l^0}\right|\right), \; \sin\chi_l = \left(1 - \cos^2\chi_l\right)^{1/2},$$

$$\overline{\delta_l^0} = \left(x^0_{l+1;m;n} - x^0_{l-1;m;n}\right) \cdot \bar{i} + \left(y^0_{l+1;m;n} - y^0_{l-1;m;n}\right) \cdot \bar{j} + \left(z^0_{l+1;m;n} - z^0_{l-1;m;n}\right) \cdot \bar{k},$$

$$\overline{\delta_l} = \left(x_{l+1;m;n} - x_{l-1;m;n}\right) \cdot \bar{i} + \left(y_{l+1;m;n} - y_{l-1;m;n}\right) \cdot \bar{j} + \left(z_{l+1;m;n} - z_{l-1;m;n}\right) \cdot \bar{k},$$

$$\cos\eta_l = c_{lz} / d_l, \; \sin\eta_l = c_{ly} / d_l,$$

$$\cos\lambda_l = d_l, \; \sin\lambda_l = c_{lx},$$

$$d_l = \left(c_{ly}^2 + c_{lz}^2\right)^{1/2},$$

$$\overline{c_l} = \frac{r_{lx}}{\left|\overline{r_l}\right|} \cdot \bar{i} + \frac{r_{ly}}{\left|\overline{r_l}\right|} \cdot \bar{j} + \frac{r_{lz}}{\left|\overline{r_l}\right|} \cdot \bar{k} = c_{lx} \cdot \bar{i} + c_{ly} \cdot \bar{j} + c_{lz} \cdot \bar{k},$$

$$\overline{r_l} = \overline{\delta_l} \times \overline{\delta_l^0} = r_{lx} \cdot \bar{i} + r_{ly} \cdot \bar{j} + r_{lz} \cdot \bar{k};$$

$\boldsymbol{T}_{l;m;n}$ – матриця зсуву, що становить:

$$\boldsymbol{T}_{l;m;n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_{l;m;n} - x^0_{l;m;n} & y_{l;m;n} - y^0_{l;m;n} & z_{l;m;n} - z^0_{l;m;n} & 1 \end{pmatrix}.$$

Визначаючи координати початкового стану вузлів кожного із фрагментів на кожному етапі розрахунків, одержуємо можливість розрахувати перерозподіл внутрішніх зусиль у досліджуваному об'єкті максимально точно.

Розглянемо **приклад розрахунку** ізотропного кубічного об'єкту, що має пружні властивості. Приймемо розміри куба $2{\times}2{\times}2$ *м*^{3}. Вважатимемо що три сусідні грані куба жорстко защемлені, а інші три вільні. Модуль пружності матеріалу приймемо рівним $E{=}2{\times}10^5$ *МПа*. Дискретну модель центральної та додаткової сіток із умовами закріплення показано на рис. 3.. У зв'язку із обраною схемою розбиття (8 фрагментів розміром $1{\times}1{\times}1$ *м*^{3}), складові векторів попередніх формоутворюючих зусиль становитимуть $F_x{=}F_y{=}F_z{=}2{\times}10^8$ *кН* (схему прикладання зусиль показано на рис.3.а.). Навантаження, деформацію від якого визначатимемо, прикладемо до вузла D центральної сітки. Векторні компоненти його складатимуть: $f_x{=}100$ *кН*, $f_y{=}150$ *кН* та $f_z{=}200$ *кН*.

Так як даний куб має вільні грані, слід виокремити кілька окремих випадків рівнянь рівноваги центральних вузлів моделі:

1. Якщо до вузла примикають 5 стрижнів (відсутній один стрижень в l-му напрямку):

$$-\left(\aleph_{\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l-1; \\ m; \\ n \end{pmatrix}} + \aleph_{\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l; \\ m+1; \\ n \end{pmatrix}} + \aleph_{\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l; \\ m-1; \\ n \end{pmatrix}} + \aleph_{\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n+1 \end{pmatrix}} + \aleph_{\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n-1 \end{pmatrix}}\right) \cdot s_{\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n \end{pmatrix}} + \aleph_{\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l-1; \\ m; \\ n \end{pmatrix}} \cdot s_{\begin{pmatrix} l-1; \\ m; \\ n \end{pmatrix}} +$$
$$+ \aleph_{\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l; \\ m+1; \\ n \end{pmatrix}} \cdot s_{\begin{pmatrix} l; \\ m+1; \\ n \end{pmatrix}} + \aleph_{\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l; \\ m-1; \\ n \end{pmatrix}} \cdot s_{\begin{pmatrix} l; \\ m-1; \\ n \end{pmatrix}} + \aleph_{\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n+1 \end{pmatrix}} \cdot s_{\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n+1 \end{pmatrix}} + \aleph_{\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n-1 \end{pmatrix}} \cdot s_{\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n-1 \end{pmatrix}} =$$
$$= -\sum f_{s(l;m;n)} - F_{s(l;m;n)}. \qquad (44)$$

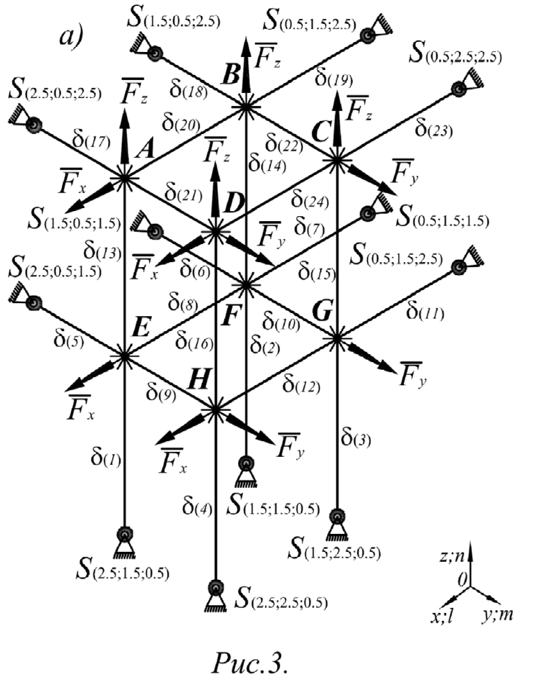
2. Якщо до вузла примикають 4 стрижня (відсутній один стрижень в l-му і один у m-му напрямках):

$$-\left(\aleph_{\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l-1; \\ m; \\ n \end{pmatrix}} + \aleph_{\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l; \\ m-1; \\ n \end{pmatrix}} + \aleph_{\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n+1 \end{pmatrix}} + \aleph_{\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n-1 \end{pmatrix}}\right) \cdot s_{\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n \end{pmatrix}} + \aleph_{\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l-1; \\ m; \\ n \end{pmatrix}} \cdot s_{\begin{pmatrix} l-1; \\ m; \\ n \end{pmatrix}} +$$
$$+ \aleph_{\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l; \\ m-1; \\ n \end{pmatrix}} \cdot s_{\begin{pmatrix} l; \\ m-1; \\ n \end{pmatrix}} + \aleph_{\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n+1 \end{pmatrix}} \cdot s_{\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n+1 \end{pmatrix}} + \aleph_{\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n-1 \end{pmatrix}} \cdot s_{\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n-1 \end{pmatrix}} = -\sum f_{s(l;m;n)} - F_{s(l;m;n)}. \qquad (45)$$

3. Якщо до вузла примикає 3 стрижня (відсутній один стрижень в l-му, один у m-му та один у n-му напрямках):

$$-\left(\aleph_{\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l-1; \\ m; \\ n \end{pmatrix}} + \aleph_{\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l; \\ m-1; \\ n \end{pmatrix}} + \aleph_{\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n-1 \end{pmatrix}}\right) \cdot s_{\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n \end{pmatrix}} + \aleph_{\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l-1; \\ m; \\ n \end{pmatrix}} \cdot s_{\begin{pmatrix} l-1; \\ m; \\ n \end{pmatrix}} +$$
$$+ \aleph_{\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l; \\ m-1; \\ n \end{pmatrix}} \cdot s_{\begin{pmatrix} l; \\ m-1; \\ n \end{pmatrix}} + \aleph_{\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n-1 \end{pmatrix}} \cdot s_{\begin{pmatrix} l; \\ m; \\ n-1 \end{pmatrix}} = -\sum f_{s(l;m;n)} - F_{s(l;m;n)}. \qquad (46)$$

Можливе і подальші «видалення» вузлів (і в'язей), а також інші комбінації видалень (в залежності від постановки та вимог задачі). Це може призвести до потреби накладання спеціальних умов закріплення вузлів додаткової сітки. Однак, в нашому випадку це не має сенсу.



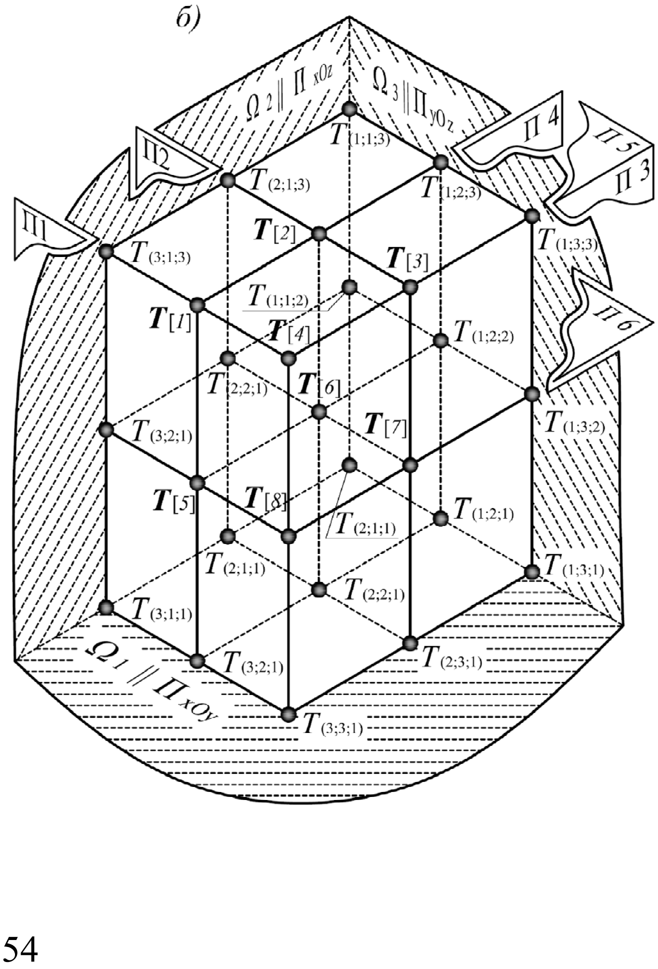


Рис.3.
Дискретна модель досліджуваної ділянки:
а) центральна сітка; б) додаткова сітка.

Примітка:
П1...П6 - *горизонтально-, фронтально- та профільно-проекціюючі січні площини*

Користуючись формулами (9), (44) – (46), запишемо рівняння стану статичної рівноваги кожного з вузлів заданої конструкції:

1) вузол A:

$$\begin{aligned}&-\left(\aleph_{(A)(B)}+\aleph_{(A)(2.5;0.5;2.5)}+\aleph_{(A)(D)}+\aleph_{(A)(E)}\right)\cdot s_{(A)}+\aleph_{(A)(B)}\cdot s_{(B)}+\\&+\aleph_{(A)(2.5;0.5;2.5)}\cdot s_{(2.5;0.5;2.5)}+\aleph_{(A)(D)}\cdot s_{(D)}+\aleph_{(A)(E)}\cdot s_{(E)}=-F_{s(A)}.\end{aligned}\tag{47}$$

2) вузол B:

$$\begin{aligned}&-\left(\aleph_{(B)(0.5;1.5;2.5)}+\aleph_{(B)(A)}+\aleph_{(B)(1.5;0.5;2.5)}+\aleph_{(B)(C)}+\aleph_{(B)(F)}\right)\cdot s_{(B)}+\\&+\aleph_{(B)(0.5;1.5;2.5)}\cdot s_{(0.5;1.5;2.5)}+\aleph_{(B)(A)}\cdot s_{(A)}+\aleph_{(B)(1.5;0.5;2.5)}\cdot s_{(1.5;0.5;2.5)}+\aleph_{(B)(C)}\cdot s_{(C)}+\\&+\aleph_{(B)(F)}\cdot s_{(F)}=-F_{s(B)}.\end{aligned}\tag{48}$$

3) вузол C:

$$\begin{aligned}&-\left(\aleph_{(C)(0.5;2.5;2.\ 5)}+\aleph_{(C)(D)}+\aleph_{(C)(B)}+\aleph_{(C)(G)}\right)\cdot s_{(C)}+\aleph_{(C)(0.5;2.5;2.\ 5)}\cdot s_{(0.5;2.5;2.\ 5)}+\\&+\aleph_{(C)(D)}\cdot s_{(D)}+\aleph_{(C)(B)}\cdot s_{(B)}+\aleph_{(C)(G)}\cdot s_{(G)}=-F_{s(C)}.\end{aligned}\tag{49}$$

4) вузол D:

$$-\left(\aleph_{(D)(C)}+\aleph_{(D)(A)}+\aleph_{(D)(H)}\right)\cdot s_{(D)}+\aleph_{(D)(C)}\cdot s_{(C)}+\aleph_{(D)(A)}\cdot s_{(A)}+\aleph_{(D)(H)}\cdot s_{(H)}=-F_{s(D)}-f_{s(C)}.\tag{50}$$

5) вузол E:

$$\begin{aligned}&-\left(\aleph_{(E)(F)}+\aleph_{(E)(2.5;0.5;15)}+\aleph_{(E)(H)}+\aleph_{(E)(2.5;1.5;05)}+\aleph_{(E)(A)}\right)\cdot s_{(E)}+\\&+\aleph_{(E)(F)}\cdot s_{(F)}+\aleph_{(E)(2.5;0.5;15)}\cdot s_{(2.5;0.5;15)}+\aleph_{(E)(H)}\cdot s_{(H)}+\aleph_{(E)(2.5;1.5;05)}\cdot s_{(2.5;1.5;05)}+\\&+\aleph_{(E)(A)}\cdot s_{(A)}=-F_{s(E)}.\end{aligned}\tag{51}$$

6) вузол F:

$$\begin{aligned}&-\left(\aleph_{(F)(0.5;1.5;1.\ 5)}+\aleph_{(F)(E)}+\aleph_{(F)(1.5;0.5;1.\ 5)}+\aleph_{(F)(G)}+\aleph_{(F)(1.5;1.5;0.\ 5)}+\aleph_{(F)(B)}\right)\cdot s_{(F)}+\\&+\aleph_{(F)(0.5;1.5;1.\ 5)}\cdot s_{(0.5;1.5;1.\ 5)}+\aleph_{(F)(E)}\cdot s_{(E)}+\aleph_{(F)(1.5;0.5;1.\ 5)}\cdot s_{(1.5;0.5;1.\ 5)}+\aleph_{(F)(G)}\cdot s_{(G)}+\\&+\aleph_{(F)(1.5;1.5;0.\ 5)}\cdot s_{(1.5;1.5;0.\ 5)}+\aleph_{(F)(G)}\cdot s_{(G)}=-F_{s(F)}.\end{aligned}\tag{52}$$

7) вузол G:

$$\begin{aligned}&-\left(\aleph_{(G)(0.5;1.5;2.5)}+\aleph_{(G)(H)}+\aleph_{(G)(F)}+\aleph_{(G)(1.5;2.5;0.5)}+\aleph_{(G)(C)}\right)\cdot s_{(G)}+\\&+\aleph_{(G)(0.5;1.5;2.5)}\cdot s_{(0.5;1.5;2.5)}+\aleph_{(G)(H)}\cdot s_{(H)}+\aleph_{(G)(F)}\cdot s_{(F)}+\aleph_{(G)(1.5;2.5;0.5)}\cdot s_{(1.5;2.5;0.5)}+\\&+\aleph_{(G)(C)}\cdot s_{(C)}=-F_{s(G)}.\end{aligned}\tag{53}$$

8) вузол H:

$$\begin{aligned}&-\left(\aleph_{(H)(G)}+\aleph_{(H)(E)}+\aleph_{(H)(2.5,2.5,0.\ 5)}+\aleph_{(H)(D)}\right)\cdot s_{(H)}+\aleph_{(H)(G)}\cdot s_{(G)}+\\&+\aleph_{(H)(E)}\cdot s_{(E)}+\aleph_{(H)(2.5,2.5,0.\ 5)}\cdot s_{(2.5,2.5,0.\ 5)}+\aleph_{(H)(D)}\cdot s_{(D)}=-F_{s(H)}.\end{aligned}\tag{54}$$

Аналогічно, система рівнянь, що визначатиме положення деякого додаткового вузла, в різних випадках може бути одержана шляхом «вилучення» окремих шестигранних фрагментів, вершини яких одночасно належать даному вузлу. Як і для центральної сітки, можливі різні варіанти та комбінації «вилучень». Нижче наведені варіанти систем, необхідні для опису рівноваги вузлів даної моделі, та відповідні обчислювальні шаблони (рис.4.)

1. Якщо вузол є вершиною 4-х суміжних фрагментів:

$$\begin{aligned}&4\cdot\Big(t_{\substack{(l+1/2);\\(m+1/2);\\(n+1/2)}}+t_{\substack{(l+1/2);\\(m+1/2);\\(n-1/2)}}\Big)+2\cdot\Big(t_{\substack{(l+3/2);\\(m+1/2);\\(n+1/2)}}+t_{\substack{(l+1/2);\\(m-1/2);\\(n+1/2)}}+t_{\substack{(l-1/2);\\(m+1/2);\\(n+1/2)}}+t_{\substack{(l+1/2);\\(m+3/2);\\(n+1/2)}}+t_{\substack{(l+3/2);\\(m+1/2);\\(n-1/2)}}+t_{\substack{(l+1/2);\\(m-1/2);\\(n-1/2)}}+t_{\substack{(l-1/2);\\(m+1/2);\\(n-1/2)}}+t_{\substack{(l+1/2);\\(m+3/2);\\(n-1/2)}}\Big)+\\&+1\cdot\Big(t_{\substack{(l+3/2);\\(m-1/2);\\(n+1/2)}}+t_{\substack{(l-1/2);\\(m-1/2);\\(n+1/2)}}+t_{\substack{(l-1/2);\\(m+3/2);\\(n+1/2)}}+t_{\substack{(l+3/2);\\(m+3/2);\\(n+1/2)}}+t_{\substack{(l+3/2);\\(m-1/2);\\(n-1/2)}}+t_{\substack{(l-1/2);\\(m-1/2);\\(n-1/2)}}+t_{\substack{(l-1/2);\\(m+3/2);\\(n-1/2)}}+t_{\substack{(l+3/2);\\(m+3/2);\\(n-1/2)}}\Big)-8\cdot\Big(s_{\substack{(l+1;\\m;\\n)}}+s_{\substack{(l;\\m;\\n)}}+s_{\substack{(l;\\m+1;\\n)}}+s_{\substack{(l+1;\\m+1;\\n)}}\Big)=0.\end{aligned}\tag{55}$$

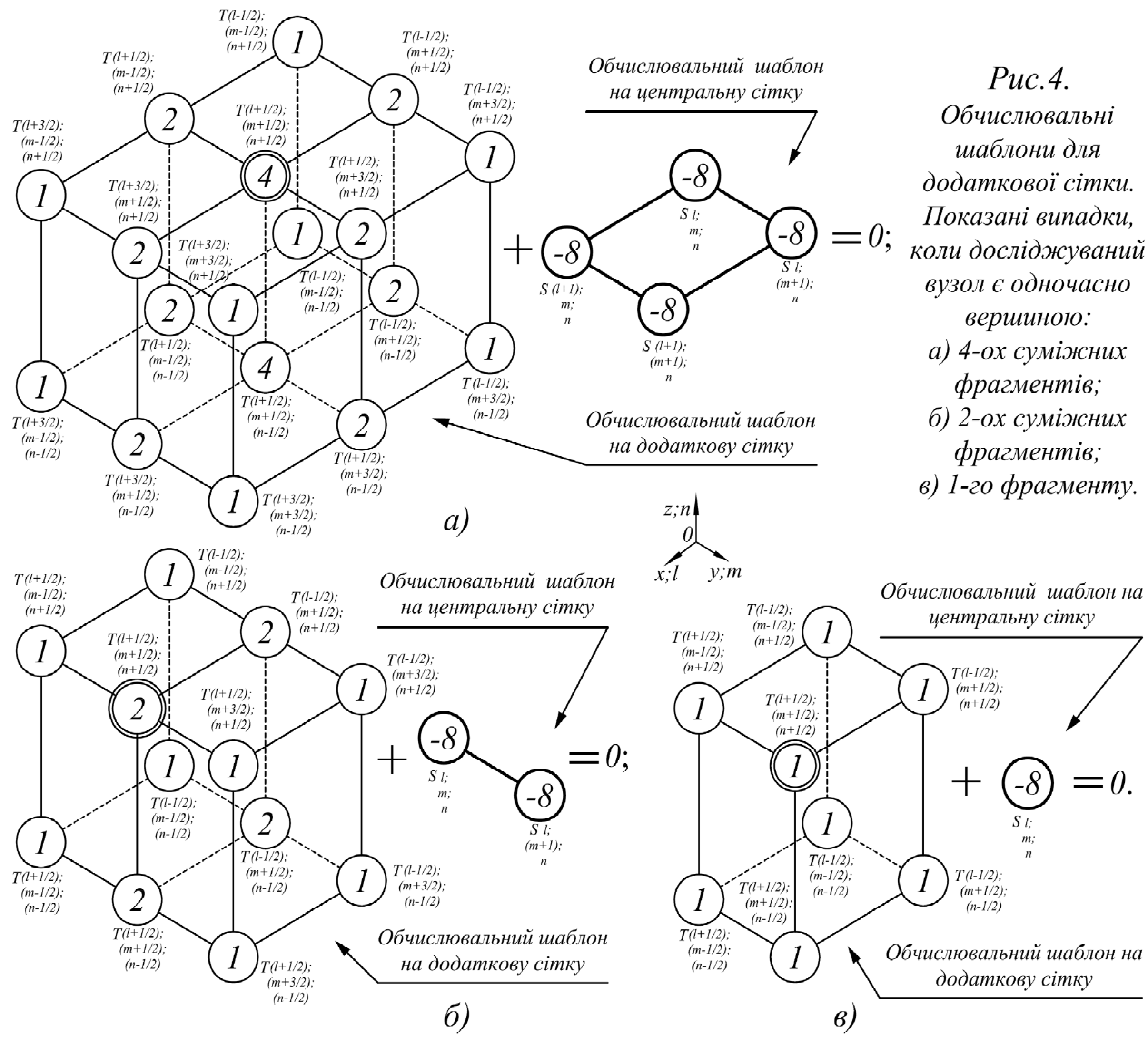


Рис.4. Обчислювальні шаблони для додаткової сітки. Показані випадки, коли досліджуваний вузол є одночасно вершиною: а) 4-ох суміжних фрагментів; б) 2-ох суміжних фрагментів; в) 1-го фрагменту.

2. Якщо вузол є вершиною 2-х суміжних фрагментів:

$$2\cdot\begin{pmatrix} t_{\substack{(l+1/2;\\ m+1/2;\\ n+1/2)}}+t_{\substack{(l+1/2;\\ m+1/2;\\ n-1/2)}}+ \\ +t_{\substack{(l-1/2;\\ m+1/2;\\ n+1/2)}}+t_{\substack{(l-1/2;\\ m+1/2;\\ n-1/2)}} \end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix} t_{\substack{(l+1/2;\\ m-1/2;\\ n+1/2)}}+t_{\substack{(l-1/2;\\ m-1/2;\\ n+1/2)}}+t_{\substack{(l-1/2;\\ m+3/2;\\ n+1/2)}}+t_{\substack{(l+1/2;\\ m+3/2;\\ n+1/2)}}+ \\ +t_{\substack{(l+1/2;\\ m-1/2;\\ n-1/2)}}+t_{\substack{(l-1/2;\\ m-1/2;\\ n-1/2)}}+t_{\substack{(l-1/2;\\ m+3/2;\\ n-1/2)}}+t_{\substack{(l+1/2;\\ m+3/2;\\ n-1/2)}} \end{pmatrix}-8\cdot\left(s_{\substack{(l;\\ m;\\ n)}}+s_{\substack{(l;\\ m+1;\\ n)}}\right)=0. \qquad (56)$$

3. Якщо вузол є вершиною лише одного фрагменту:

$$t_{\substack{(l+1/2;\\ m-1/2;\\ n+1/2)}}+t_{\substack{(l-1/2;\\ m-1/2;\\ n+1/2)}}+t_{\substack{(l-1/2;\\ m+1/2;\\ n+1/2)}}+t_{\substack{(l+1/2;\\ m+1/2;\\ n+1/2)}}+t_{\substack{(l+1/2;\\ m-1/2;\\ n-1/2)}}+t_{\substack{(l-1/2;\\ m-1/2;\\ n-1/2)}}+t_{\substack{(l-1/2;\\ m+1/2;\\ n-1/2)}}+t_{\substack{(l+1/2;\\ m+1/2;\\ n-1/2)}}-8\cdot s_{\substack{(l;\\ m;\\ n)}}=0. \qquad (57)$$

Відповідно до формул (10), (55) – (57), складаємо системи рівнянь, що описують положення вузлів даної додаткової сітки.

1) вузол 1:

$$2\cdot\left(t_{[1]}+t_{[2]}+t_{[5]}+t_{[6]}\right)+1\cdot\left(t_{[3]}+t_{[4]}+t_{[7]}+t_{[8]}+t_{(3;1;3)}+t_{(2;1;3)}+t_{(2;1;2)}+t_{(3;1;2)}\right)= \\ =8\cdot\left(s_{[A]}+s_{[D]}\right); \qquad (58)$$

2) вузол 2:

$$4\cdot\left(t_{[2]}+t_{[6]}\right)+2\cdot\left(t_{[1]}+t_{[3]}+t_{[5]}+t_{[7]}+t_{(2;1;3)}+t_{(1;2;3)}+t_{(2;1;2)}+t_{(1;2;2)}\right)+ \\ +1\cdot\left(t_{[4]}+t_{[8]}+t_{(3;1;3)}+t_{(1;1;3)}+t_{(3;1;2)}+t_{(1;1;2)}+t_{(1;3;3)}+t_{(1;3;2)}\right)= \\ =8\cdot\left(s_{[A]}+s_{[B]}+s_{[C]}+s_{[D]}\right); \qquad (59)$$

3) вузол 3:

$$
\begin{gathered}
2\cdot\left(t_{[2]}+t_{[3]}+t_{[6]}+t_{[7]}\right)+1\cdot\left(t_{[1]}+t_{[4]}+t_{[5]}+t_{[8]}+t_{(1;2;3)}+t_{(1;3;3)}+t_{(1;3;2)}+t_{(1;2;2)}\right)= \\
=8\cdot\left(s_{[C]}+s_{[D]}\right);
\end{gathered}
\tag{60}
$$

4) вузол 4:

$$
t_{[1]}+t_{[2]}+t_{[3]}+t_{[4]}+t_{[5]}+t_{[6]}+t_{[7]}+t_{[8]}=8\cdot s_{[D]}\,; \tag{61}
$$

5) вузол 5:

$$
\begin{gathered}
4\cdot\left(t_{[5]}+t_{[6]}\right)+2\cdot\left(t_{[1]}+t_{[2]}+t_{[7]}+t_{[8]}+t_{(3;1;2)}+t_{(3;2;1)}+t_{(2;2;1)}+t_{(2;1;2)}\right)+ \\
+1\cdot\left(t_{[3]}+t_{[4]}+t_{(3;1;3)}+t_{(3;3;1)}+t_{(3;1;1)}+t_{(2;1;3)}+t_{(2;3;1)}+t_{(2;1;1)}\right)= \\
=8\cdot\left(s_{[A]}+s_{[D]}+s_{[E]}+s_{[H]}\right);
\end{gathered}
\tag{62}
$$

6) вузол 6:

$$
\begin{gathered}
8\cdot t_{[6]}+4\cdot\left(t_{[2]}+t_{[5]}+t_{[7]}+t_{(2;2;1)}+t_{(2;1;2)}+t_{(1;2;2)}\right)+ \\
+2\cdot\left(t_{[1]}+t_{[3]}+t_{[8]}+t_{(2;1;3)}+t_{(1;2;3)}+t_{(3;1;2)}+t_{(1;1;2)}+t_{(1;3;2)}+t_{(2;1;1)}+t_{(1;2;1)}+t_{(2;3;1)}+t_{(3;2;1)}\right)+ \\
+1\cdot\left(t_{[4]}+t_{(3;1;3)}+t_{(1;1;3)}+t_{(1;3;3)}+t_{(3;1;1)}+t_{(1;1;1)}+t_{(1;3;1)}+t_{(3;3;1)}\right)= \\
=8\cdot\left(s_{[A]}+s_{[B]}+s_{[C]}+s_{[D]}+s_{[E]}+s_{[F]}+s_{[G]}+s_{[H]}\right);
\end{gathered}
\tag{63}
$$

7) вузол 7:

$$
\begin{gathered}
4\cdot\left(t_{[6]}+t_{[7]}\right)+2\cdot\left(t_{[2]}+t_{[3]}+t_{[5]}+t_{[8]}+t_{(2;3;1)}+t_{(2;2;1)}+t_{(1;2;2)}+t_{(1;3;2)}\right)+ \\
+1\cdot\left(t_{[1]}+t_{[4]}+t_{(1;2;3)}+t_{(1;3;3)}+t_{(3;2;1)}+t_{(1;2;1)}+t_{(1;3;1)}+t_{(3;3;1)}\right)= \\
=8\cdot\left(s_{[C]}+s_{[D]}+s_{[G]}+s_{[H]}\right);
\end{gathered}
\tag{64}
$$

8) вузол 8:

$$
\begin{gathered}
2\cdot\left(t_{[5]}+t_{[6]}+t_{[7]}+t_{[8]}\right)+1\cdot\left(t_{[1]}+t_{[2]}+t_{[3]}+t_{[4]}+t_{(3;2;1)}+t_{(2;2;1)}+t_{(2;3;1)}+t_{(3;3;1)}\right)= \\
=8\cdot\left(s_{[D]}+s_{[H]}\right).
\end{gathered}
\tag{65}
$$

Сумісний розв'язок систем рівнянь (47) – (54) та (58) – (65) дає повне уявлення про НДС досліджуваної конструкції. Для прикладу, в таблиці 1 та на рисунку 5 показано значення переміщень вузлів дискретної моделі куба.

Таблиця 1

Центральна сітка							Додаткова сітка						
S	Координати вузлів (м)			Переміщення вузлів (мм)			T	Координати вузлів (м)			Переміщення вузлів (мм)		
№	X	Y	Z	U_X	U_Y	U_Z	№	X	Y	Z	U_X	U_Y	U_Z
A	2.500000084	1.500000115	2.500000175	8.3931E-05	0.00011543	0.0001747	1	3.000000245	2.000000274	3.000000483	0.00024514	0.00027355	0.00048289
B	1.500000033	1.500000054	2.500000078	3.3153E-05	5.3894E-05	7.7839E-05	2	2.000000132	2.000000217	3.000000307	0.00013215	0.00021679	0.00030686
C	1.500000073	2.50000013	2.500000175	7.2572E-05	0.00012984	0.00017455	3	2.000000187	3.00000035	3.000000482	0.00018697	0.0003501	0.00048242
D	2.500000	2.500000	2.500000	0.000260	0.000398	0.000535	4	3.000000	3.000001	3.000001	0.000859	0.001307	0.001740

	26	398	535	23	5	16		86	307	74	64	24	04
E	2.500000037	1.500000054	1.500000076	3.6769E-05	5.4142E-05	7.598E-05	5	3.000000161	2.000000219	2.000000292	0.00016108	0.00021878	0.00029199
F	1.500000017	1.500000027	1.500000039	1.6634E-05	2.6795E-05	3.9481E-05	6	2.000000133	2.000000214	2.000000316	0.00013307	0.00021436	0.00031585
G	1.500000033	2.500000059	1.500000076	3.2682E-05	5.8979E-05	7.589E-05	7	2.000000128	3.000000257	2.000000291	0.00012839	0.00025747	0.00029127
H	2.500000082	2.50000013	1.500000159	8.2247E-05	0.00013004	0.00015863	8	3.000000235	3.00000035	2.00000037	0.00023544	0.00034969	0.00036992

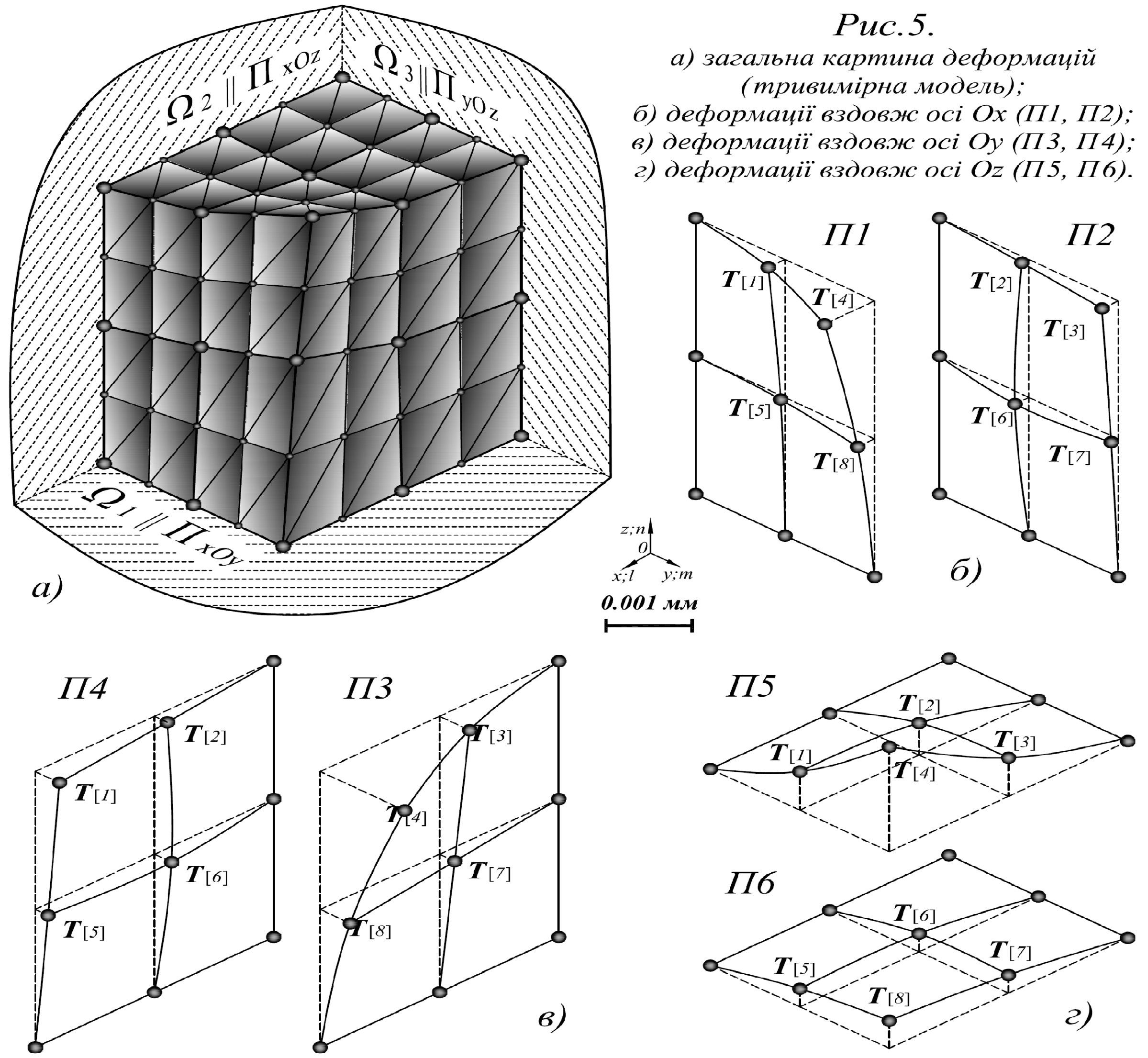
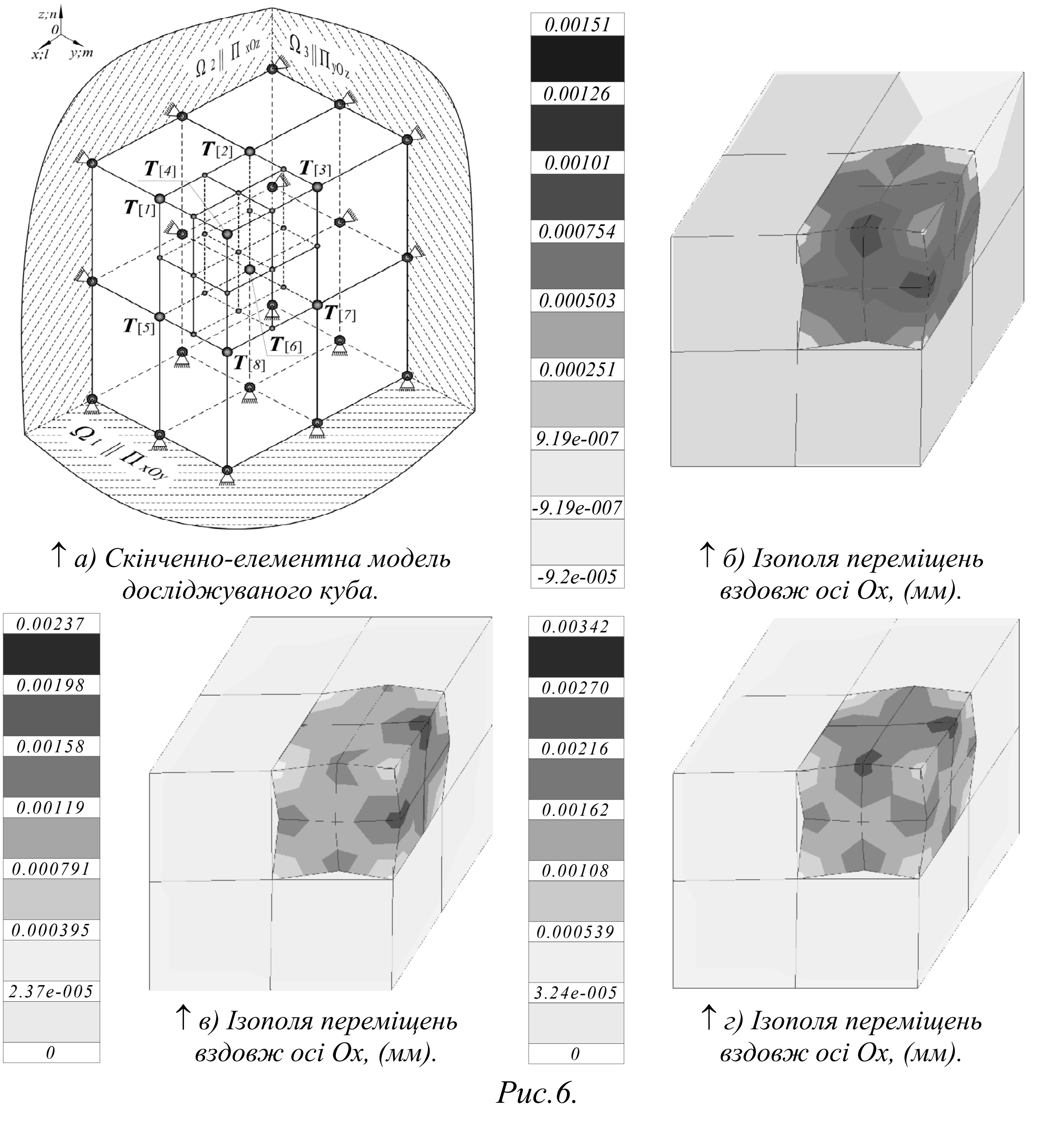


Рис.5.
а) загальна картина деформацій (тривимірна модель);
б) деформації вздовж осі Ох (П1, П2);
в) деформації вздовж осі Оу (П3, П4);
г) деформації вздовж осі Оz (П5, П6).

Для можливості порівняння та оцінки правильності одержаних результатів було виконано розрахунок аналогічного об'єкту за допомогою МСЕ у середовищі програмного комплексу ЛІРА 9.6.. Усі вихідні умови було задано аналогічно. Елементне розбиття куба було виконано максимально близько до запропонованої у попередньому прикладі дискретної моделі (рис.6.а). Результати розрахунку можна наочно представити у формі ізополів переміщень (див. рис.6: б, в, г.).

Висновки. Запропонована методика дозволяє змоделювати та розрахувати процес пружних деформацій тіла із заданими геометричними та фізико-механічними параметрами. Простота моделі нерозтяжної нiтi, на якій базуються запропоновані алгоритми, а також її сумісність із співвідношеннями загального закону Гука, дозволяє відносно просто прослідкувати взаємозв'язок між деформаціями тіла та напруженнями, які виникають у ньому і стабілізуються в процесі ітераційного числення. Необхідність останнього є наслідком високої нелінійності зв'язку між центральною та додатковою сітками. Окрім легкості складання власне геометричної моделі, зручність методики проявляється у відсутності потреби виконання надмірно високої дискретизації (деталізації) досліджуваного тіла.



↑ *а) Скінченно-елементна модель досліджуваного куба.*

↑ *б) Ізополя переміщень вздовж осі Ох, (мм).*

↑ *в) Ізополя переміщень вздовж осі Ох, (мм).*

↑ *г) Ізополя переміщень вздовж осі Ох, (мм).*

Рис.6.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кулон Ж-Л, Сабонадьер Ж-К. САПР в электротехнике: Пер. С франц. – М.: Мир, 1988. – 208 с., ил.

2. Скочко В.І.. Визначення НДС пружного середовища під дією електростатичного поля на основі статико-геометричного методу. «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Вип. 86. К.: КНУБА, 2010р. – 450с., с 394-403.

3. Ковалев С.Н. Формирование дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций. Дисс. ... докт. техн. наук.– М.: 1986. – 348 с.

4. Скочко В. І.. Деякі аспекти геометричного моделювання НДС середовища із заданими властивостями. «Прикладна геометрія та інженерна графіка»: Наук.-техн. збірник. Вип. 87. К.: КНУБА, 2011р. – 486 с., с 347-356.

5. Роджерс Д., Адамс Дж.. Математические основы машинной графики. Пер. с англ. – М.: Мир, 2001. – 640 с., ил.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГОЙ СРЕДЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ЗАДАННОЙ НАГРУЗКИ

В работе представлена методика, позволяющая смоделировать и рассчитать процесс упругой деформации тела с заданными геометрическими и физико-механическими параметрами. Простота модели нерастяжимой нити, на которой основан предложенный алгоритм, а также её совместимость с соотношениями закона Гука, позволяет относительно просто проследить взаимосвязь между деформациями тела и напряжениями, которые возникают в нём и стабилизируются в процессе итерационного исчисления. Необходимость последнего продиктована высокой нелинейностью связи между координатами центральной и дополнительной сетей, являющихся в совокупности дискретной интерпретацией исследуемого объекта. Помимо простоты составления геометрической модели, удобность методики проявляется в отсутствии необходимости выполнения чрезмерно высокой дискретизации изучаемого тела.

GEOMETRICAL MODELLING OF THE ELASTIC MEDIUM UNDER THE GIVEN FORCE'S INFLUENCE

The article describes simple method to fashion the process of resilience deformation of the elastic medium with given physical and geometrical parameters. This method covers the introducing of 2 types of three-dimensional nets: the central net and the complementary net. The first one perceives the mechanical effect of force's influence. The second net is the model of deformable medium shaping. It defines all tensions in the medium (material). The method is based on the non-stretched thread model. The compatibility between this model and Hook's law allows tracing interconnections between the elastic medium deformations and its exertions. The convenience of this method is in absentia of the necessity to perform an abundantly high discretization of concerned medium.