

УДК 519.21

канд. ф-м. наук, доц. Наголкіна З.І.,
Київський національний університет
будівництва і архітектури

ОЦІНКА ВПЛИВУ ВИПАДКОВИХ ФАКТОРІВ НА НАДІЙНІСТЬ БУДІВЕЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЙ

Вплив випадкових факторів на надійність будівельних конструкцій моделюється стохастичним диференціальним рівнянням. Одержано оцінку максимального розв'язку такого рівняння.

Ключові слова. Будівельні конструкції, стохастичні рівняння, випадкові фактори, максимальний розв'язок, коефіцієнти рівняння, подвійний показниковий закон.

При розрахунках надійності будівельних конструкцій розглядають режими максимальних навантажень, які виникають під впливом випадкових факторів. Це може бути максимальна сила і швидкість вітру, максимальний тиск снігового шару, максимальні перепади температурних режимів. Для проектування об'єктів будівництва треба визначити надійність, або імовірність перевищення відповідними фізичними параметрами деяких критичних значень.

При статистичній обробці експериментального матеріалу розглядають закон розподілу екстремальних членів вибірки. Для цього використовують подвійний показниковий закон 1.

Нехай процес $x(t)$ в розглядуваній фізичній системі описується нелінійним диференціальним рівнянням типу

$$dx(t) = a(t, x(t))dt.$$

Внаслідок дії різних випадкових факторів цей процес моделюється стохастичним диференціальним рівнянням дифузійного типу

$$dx(t) = a(t, x(t))dt + b(t, x(t))dw(t) \quad (1)$$

Розглянемо оцінку максимального розв'язку цього рівняння. Нехай коефіцієнти (1) визначені і неперервні в гільбертовому функціональному просторі H і задовольняють при $t \in [0, T]$ умовам:

$$\|a(t, x)\|^2 + \sigma^2 b(t, x) \leq c_1 + c_2 \|x\|^2 \quad (2)$$

$$\|a(t, x) - a(t, y)\|^2 + \sigma^2(b(t, x) - b(t, y)) \leq c_3 \|x - y\|^2 \quad (3)$$

де c_1, c_2, c_3 - деякі довільні сталі, $t \in [0, T]$ -час, σ^2 - норма операторів Гільберта-Шмідта, які визначені стандартним чином. В цих умовах, як відомо 2, 3 існує єдиний, з точністю до стохастичної еквівалентності, розв'язок рівняння (1), який задовольняє інтегральному рівнянню Іто:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t a(s, x(s)) ds + \int_0^t b(s, x(s)) dw(s) \quad (4)$$

Лема. Нехай коефіцієнти рівняння $a(t, x), b(t, x)$ визначені і неперервні в $[0, T] \times H$ і приймають значення в H і $\gamma_2(H)$ та задовольняють умовам (2), (3). Тоді існує розв'язок (4), що має оцінку

$$E \max_{s \in [0, t]} \|x(s)\|^2 \leq C, \quad (5)$$

Де C залежить від $c_1, c_2, T, \|x_0\|$.

Доведення базується на застосуваннях нерівностей Коші і Колмогорова в H до розв'язку рівняння (4). Аналогічно 2 маємо

$$\|x(s)\|^2 \leq 3\|x_0\|^2 + 3\left\|\int_0^s a(\tau, x(\tau)) d\tau\right\|^2 + 3\left\|\int_0^s b(\tau, x(\tau)) dw(\tau)\right\|^2.$$

Відповідно

$$E \max_{s \in [0, t]} \|x(s)\|^2 \leq 3\|x_0\|^2 + 3t \int_0^t E \|a(\tau, x(\tau))\|^2 d\tau + 12 \max_{s \in [0, t]} E \left\| \int_0^s b(\tau, x(\tau)) dw(\tau) \right\|^2 \leq$$

$$3\|x_0\|^2 + (3t + 12) \int_0^t (c_1 + c_2 E \|x(\tau)\|^2) d\tau.$$

Позначимо $\varphi(t) = E \max_{s \in [0, t]} \|x(s)\|^2$. Тоді буде мати місце нерівність вигляду

$$\varphi(t) \leq k_1 + k_2 \int_0^t \varphi(\tau) d\tau,$$

яка внаслідок леми Гронуола призводить до співвідношення

$$\varphi(t) \leq k_1 e^{k_2 t}, \text{ де } k_1 = 3\|x_0\|^2 + 3c_1 t^2 + 12c_2 t, k_2 = 3tc_2 + 12c_2.$$

Сталі k_1, k_2 - обмежені при обмеженому T . Таким чином, позначимо $C = k_1 e^{k_2 T}$, що остаточно доводить справедливність (5).

В умовах (2) і (3) існування єдиного розв'язку рівняння (4) в просторі H можна знайти середньо квадратичну оцінку розв'язку цього рівняння. В **Ошибка! Источник ссылки не найден.** отримано за допомогою формули Іто **Ошибка! Источник ссылки не найден.** оцінку

$$E\|x(t)\|^2 \leq e^{\alpha t} \|x_0\|^2 + \beta t.$$

При обмеженому T має місце нерівність $E\|x(t)\|^2 \leq M$, де $M = e^{\alpha T} \|x_0\|^2 + \beta T$, сталі α, β залежать від c_1, c_2 .

Крім оцінки (5) згідно з нерівністю Чебишева можна знайти імовірність перевищення поточними значеннями процесу $x(t)$ деякого критичного значення $x_{kp} = g$.

Дійсно,

$$P\{\|x(t)\| \geq g\} \leq \frac{E\|x(t)\|^2}{g^2}, \text{ або } P\{\|x(t)\| \geq g\} \leq \frac{M}{g^2} \leq \frac{C}{g^2}.$$

Література

1. Н.В. Смирнов, И.В. Дунин-Барковский, Краткий курс математической статистики для технических приложений. - М., Физматгиз, 1959. - 436 с.
2. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория. случайных процессов, т. 3. - М.: Наука, 1973.
3. Белополюская Я.И., Наголкина З.И. О мультипликативных представлениях решений нелинейных стохастических уравнений, сб: Вероятностные распределения в бесконечномерном пространстве. - К.: Наукова думка, 1978.

Аннотация.

Влияние случайных факторов на прочность строительных конструкций моделируется стохастическим дифференциальным уравнением. Получены оценки максимального решения этого уравнения.

Annotation.

Impact of random factors on the strength of structures was modeled with stochastic differential equation. Were obtained evaluations of it's maximal solution.