

УДК 539.3

В.А. Баженов, д-р техн. наук
О.О. Лук'яненко, канд. техн. наук
О.В. Костіна, канд. техн. наук

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ СТОХАСТИЧНИХ ПАРАМЕТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ ПОЛОГОЇ ОБОЛОНКИ

Представлений чисельний підхід дослідження динамічної поведінки та стійкості пологої оболонки при дії стохастичного параметричного навантаження. Задача стохастичної стійкості сформульована як задача стійкості тривіальних розв'язків диференціальних рівнянь відносно моментних функцій другого порядку. Досліджена стійкість динамічних режимів стохастичних коливань оболонки. Визначені критичні значення стохастичного параметричного навантаження на оболонку.

Ефективними конструктивними елементами інженерних споруд в багатьох областях техніки і будівництва є тонкостінні оболонки. Порівнюючи різні форми оболонок можна відзначити певну тенденцію до проектування все більш пологих оболонок, пов'язану з бажанням зменшити конструктивний об'єм споруд. Але при цьому втрата стійкості пологих оболонок стає більш небезпечною. У випадках, коли оболонки перебувають під впливом динамічних навантажень, які змінюються в часі за випадковим законом, можуть збуджуватися стохастичні параметричні коливання [1-3]. Тому актуальною є реалізація точних методів розрахунку динаміки пологих оболонок, які дозволять отримати найбільш повну і достовірну інформацію про особливості їхньої динамічної поведінки та стохастичної стійкості при параметричному впливі. В роботі представлений чисельний підхід дослідження динамічної поведінки та стійкості пологої оболонки при дії дельта-корельованого стохастичного параметричного навантаження.

Редукована скінченноелементна модель стохастичних параметричних коливань дералюмінієвої квадратної пологої оболонки побудована авторами і представлена в роботі [4]. Оболонка має наступні вхідні дані: сторона $a = b = 0,480 \text{ м}$, товщина $h = 0,004 \text{ м}$, модуль пружності $E = 7,2 \times 10^7 \text{ кПа}$, питома вага $\rho = 2700 \text{ кг/м}^3$, коефіцієнт Пуасона $\mu = 0,3$, прогин в середині і на контурі $f = 0,096 \text{ м}$. Поверхня оболонки змодельована у вигляді сукупності трикутних плоских скінченних елементів зі шістьма ступенями вільності в вузлах. Вздовж контуру оболонки обмежені переміщення в просторі. На оболонку зі сторони її випуклості діє поверхнєве розподілене стохастичне параметричне

навантаження $z(t) = z_0 + \tilde{z}(t)$, де z_0 – стала складова навантаження; $\tilde{z}(t)$ – дельта-корельована випадкова складова навантаження з кореляційною функцією

$$K(\tau) = \sigma_0^2 e^{-\alpha\tau} \left(\cos \theta_\alpha \tau + \frac{\alpha}{\theta_\alpha} \sin \theta_\alpha \tau \right), \quad (1)$$

і скінченим часом кореляції

$$\tau_0 = \frac{1}{\sigma_0^2} \int K(\tau) d\tau = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \theta_\alpha^2}, \quad (2)$$

де σ_0^2 – інтенсивність стохастичного впливу; α – параметр кореляції, θ_α – частота схованої періодичності.

Математична модель оболонки має вигляд системи детерміністичних диференціальних рівнянь відносно моментних функцій другого порядку у фазових змінних $\zeta_1(t) = y_i(t)$, $\zeta_2(t) = \dot{y}_i(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \zeta_1^2(t) \rangle &= 2 \langle \zeta_1(t) \zeta_2(t) \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle \zeta_1(t) \zeta_2(t) \rangle &= \langle \zeta_2^2(t) \rangle - \omega_i^2 \langle \zeta_1^2(t) \rangle - 2\epsilon_i \omega_i \langle \zeta_1(t) \zeta_2(t) \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle \zeta_2^2(t) \rangle &= -4\epsilon_i \omega_i \langle \zeta_2^2(t) \rangle - 2\omega_i^2 \langle \zeta_1(t) \zeta_2(t) \rangle + a_i^2 \omega_i^4 z_0^2 \langle \zeta_2^2(t) \rangle + a_i^2 \omega_i^4 \sigma_0^2 \tau_0 \langle \zeta_2^2(t) \rangle, \end{aligned} \quad (3)$$

з початковими умовами $\zeta_1(0) = y_{i0}$, $\zeta_2(0) = \dot{y}_{i0}$. Тут $y_i(t)$, $\dot{y}_i(t)$ – узагальнені координати та узагальнені швидкості вузлів скінченноелементної моделі оболонки; ω_i – частота власних коливань, ϵ_i – коефіцієнт конструкційного демпфірування оболонки; a_i – коефіцієнти, які характеризують вплив сталої складової стохастичного навантаження на жорсткісні характеристики оболонки.

Таким чином, аналіз стійкості оболонки при стохастичному параметричному навантаженні зводиться до дослідження стійкості рівнянь від моментних функцій другого порядку (3) по кожній формі коливань.

Важливим є дослідження динаміки оболонки при зростанні статичної складової параметричного навантаження без урахування його випадкової складової ($\sigma_0 = 0$). Вплив статичної складової навантаження z_0 на частоти власних коливань оболонки виконано за допомогою методу Ланцоша, який реалізований в програмному комплексі NASTRAN [1]. Результати розрахунку наведені в табл. 1.

Таблиця 1

z_0 , $\kappa\Pi a$	Частоти власних коливань оболонки V_i , $\Gamma\mathcal{U}$									
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}
0,001	199,4	401,7	402,1	637,5	719,4	756,5	983,1	983,8	1126,2	1126,9
1	198,8	401,0	401,4	636,9	718,6	755,8	982,4	983,1	1125,5	1126,1
10	193,1	394,6	395,1	630,9	711,4	749,4	976,4	977,1	1118,7	1119,4
50	149,9	349,6	350,3	590,0	661,3	705,4	935,0	935,9	1072,9	1073,7
100	121,1	323,5	324,3	567,5	633,6	681,3	912,6	913,5	1048,2	1049,1
135	75,1	290,6	291,5	540,4	600,3	652,6	886,0	887,1	1019,3	1020,2
155	20,3	269,8	270,9	524,2	580,3	635,5	870,3	871,4	1002,3	1003,3
156	0	249,6	250,6	504,0	560,1	615,2	850,1	851,2	982,1	983,1

При невеликих статичних навантаженнях спостерігається збільшення власної частоти оболонки по кожній формі коливань, тобто оболонка стає більш жорсткою. При подальшому збільшенні статичного впливу власні частоти навантаженої оболонки зменшуються. При $z_0 = 156 \kappa\Pi a$ перша частота власних коливань дорівнює нулю, що відповідає втраті стійкості оболонки.

Отримані результати представлені у вигляді кривих, що відповідають першим десяти частотам власних коливань навантаженої (суцільна лінія) і ненавантаженої (штрихова лінія) оболонки (рис. 1).

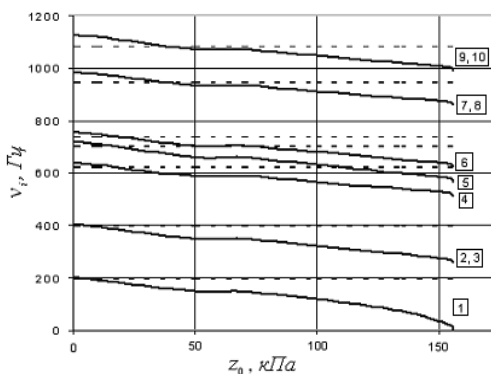


Рис. 1. Частоти власних коливань навантаженої оболонки

За допомогою прямого методу чисельного інтегрування Рунге-Куты четвертого порядку досліджена динамічна поведінка оболонки при дії

статичної складової навантаження. На рис. 2 представлені залежності від часу моментної функції другого порядку $\zeta_1^2(t)$ по першій формі коливань та її фазові траєкторії при $z_0 = 50 \text{ кПа}$. Коливальний режим оболонки без урахування конструкційного демпфірування (рис. 2, а) відповідає гармонічним коливанням зі сталою амплітудою і частотою $\nu_1 = 149,936 \text{ Гц}$. Затухаючі коливання спостерігаються при врахуванні коефіцієнта конструкційного демпфірування $\varepsilon_1 = 0,0276$ (рис. 2, б). В обох випадках режим коливань оболонки є стійким.

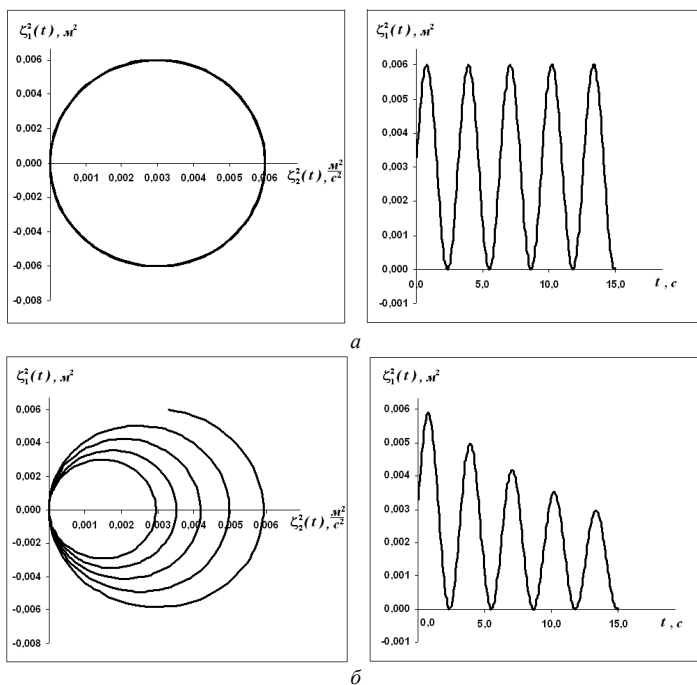


Рис. 2. Динамічна поведінка оболонки при дії статичної складової параметричного навантаження: а) без урахування конструкційного демпфірування; б) з урахування конструкційного демпфірування

Досліджено вплив стохастичної складової параметричного навантаження на динамічну поведінку оболонки без урахування статичної складової навантаження. За допомогою прямого методу Рунге-Куты чисельно виконано інтегрування системи диференціальних рівнянь (3). На рис. 3 представлені фазові траєкторії та динамічна поведінка розв'язку

$\zeta_1^2(t)$ системи (3) при стійкому (рис. 3, а, в) та нестійкому (рис. 3, б) режимах коливань оболонки по першій формі коливань.

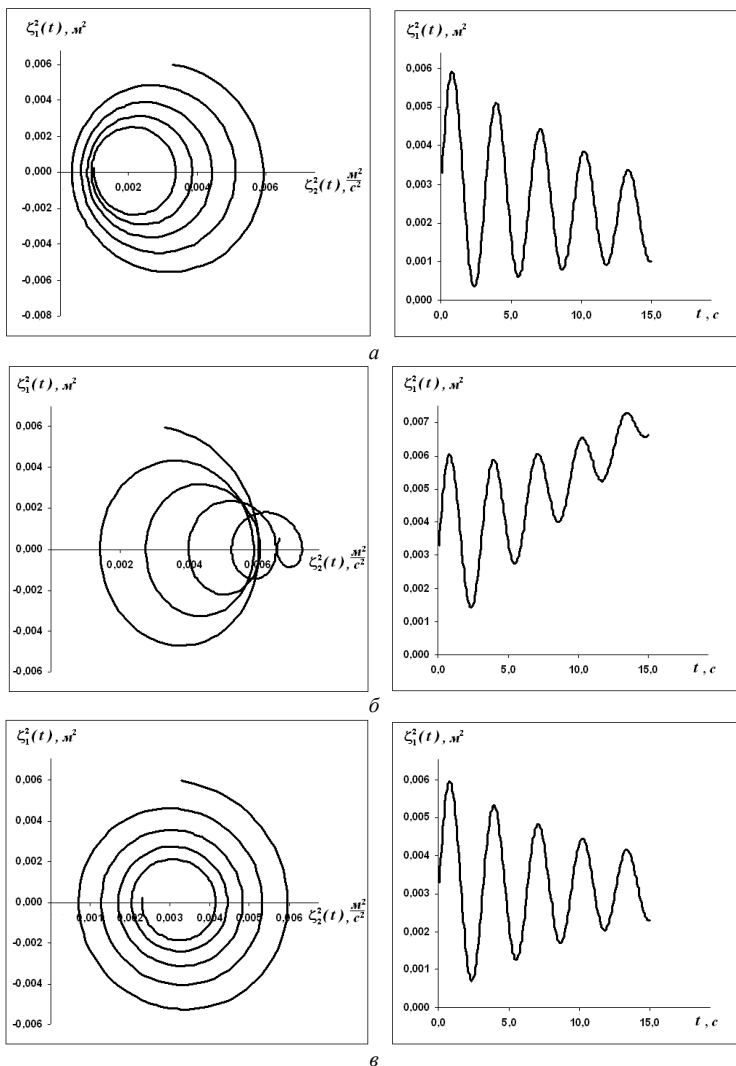


Рис. 3. Динамічні режими коливань оболонки при стохастичному параметричному впливі:
а) стійкий; б) нестійкий; в) стійкий режим на границі області стійкості

При стійкому режимі стохастичних параметричних коливань значення розв'язку $\zeta_1^2(t)$ системи (3) з часом зменшується, при нестійкому – збільшується. Якщо переписати систему детерміністичних диференціальних рівнянь відносно моментних функцій другого порядку (3) у вигляді лінійної автономної системи

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \langle \zeta_1^2(t) \rangle \\ \langle \zeta_1(t) \zeta_2(t) \rangle \\ \langle \zeta_2^2(t) \rangle \end{Bmatrix} = G(t) \begin{Bmatrix} \langle \zeta_1^2(t) \rangle \\ \langle \zeta_1(t) \zeta_2(t) \rangle \\ \langle \zeta_2^2(t) \rangle \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

де $G(t)$ – матриця, коефіцієнти якої є $\frac{2\pi}{\omega}$ – періодичні функції

$$G(t) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -\omega_i^2 & -2\varepsilon_i \omega_i & 1 \\ a_i^2 \omega_i^4 \sigma_0^2 \tau_0 & -2\omega_i^2 & -4\varepsilon_i \omega_i \end{vmatrix}, \quad (5)$$

то аналіз стійкості оболонки зводиться до задачі про стійкість тривіальних розв'язків системи (4). За допомогою методу узагальнених показників Хілла при розв'язанні алгебраїчної задачі на власні значення визначені характеристичні показники та побудовані границі області нестійкості системи (4). У випадку, коли у всіх характеристичних показників дійсна частина менша від нуля, компоненти будь-якого розв'язку системи зменшуються по модулю, що відповідає стійкому тривіальному розв'язку. Якщо серед характеристичних показників з'являється хоча б один з додатною дійсною частиною, тривіальний розв'язок системи (4) є нестійким. Значення параметрів системи (4), при яких максимальна дійсна частина характеристичних показників дорівнює нулю, відповідають границі області нестійкості.

На рис. 4 представлена поведінка характеристичних показників системи (4) від впливу стохастичного параметричного навантаження на оболонку при частоті схованої періодичності $\theta_\alpha = \omega_1$, параметрі кореляції $\alpha = \varepsilon_1 \omega_1 = 0,0276 \omega_1$ та радіусі кореляції

$$\tau_0 = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \theta_\alpha^2} = 0,0552 / \omega_1. \text{ Дійсні частини характеристичних показників}$$

показані суцільною лінією, комплексні – штриховою.

Додатні дійсні частини характеристичних показників, які відповідають нестійкому режиму коливань, лежать у верхній півплощині. Точки перетину суцільної кривої осі координат відповідають критичним значенням стохастичної складової параметричних коливань.

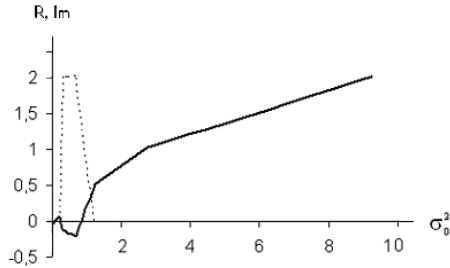


Рис. 4. Залежність характеристичного показника від дисперсії стохастичного впливу

Визначені і представлені на рис. 5 критичні значення дисперсії стохастичної складової навантаження σ_0^2 по п'яти формах власних коливань оболонки при зміні коефіцієнта $\beta = \theta_\alpha / \omega_i$. Критичні стохастичні навантаження, які відповідають першій формі коливань, мають значення більші за значення, що отримані для інших форм. Зі збільшенням частоти схованої періодичності θ_α критичні навантаження зростають.

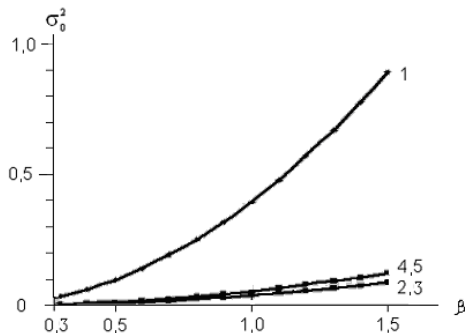


Рис. 5. Критичні значення стохастичних параметричних навантажень

Для визначення критичного стохастичного навантаження з урахуванням всіх форм коливань необхідно виконати операцію сумування значень по окремих формах, що отримані для конкретної частоти схованої періодичності. Значення інтенсивності стохастичного навантаження, що лежать вище за отриману криву, належать до областей нестійкості оболонки.

Висновок. Представлений чисельний підхід дозволяє за основи отриманої авторами в роботі [1] математичної моделі дослідити динамічну поведінку пологої оболонки при дії дельта-корельованого

стохастичного параметричного навантаження; за допомогою дослідження стійкості тривіальних розв'язків диференціальних рівнянь відносно моментних функцій другого порядку проаналізувати стохастичну стійкість оболонки; визначити критичні значення стохастичного параметричного навантаження при різних частотах схованої періодичності; за допомогою прямого методу чисельного інтегрування надати якісну характеристику режимів стохастичних коливань оболонки; оцінити вплив статичної складової параметричних навантажень на власні частоти коливань оболонки.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Болотин В.В.* Случайные колебания упругих систем. М., Наука, 1979. - 335 с.
2. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения в случайно однородных средах. - М.: Наука, 1980. - 336 с.
3. *Дехтярюк Є.С., Лук'яненко О.О., Отрашевська В.В.* Динамічна стійкість пружних систем при комбінованому стохастичному навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд. - К.: КНУБА, 2003. – Вип.72. – С.51 – 59.
4. *Баженов В.А., Дехтярюк Є.С., Лук'яненко О.О., Костіна О.В.* Чисельна побудова редукованих моделей стохастичних параметричних коливань пологих оболонок // Опір матеріалів і теорія споруд. - К.: КНУБА, 2011. – Вип.87. – С.73 – 87.
5. *Шимкович Д.Г.* Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. - М.: ДМК Пресс, 2001.- 448 с.

Стаття надійшла до редакції 14.07.2012 р.

В.А. Баженов, О.А. Лук'яненко, Е.В. Костіна

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ

Представлен численный подход исследования динамического поведения и устойчивости пологой оболочки при действии стохастической параметрической нагрузки. Задача стохастической устойчивости сформулирована как задача устойчивости тривиальных решений дифференциальных уравнений относительно моментных функций второго порядка. Исследована устойчивость динамических режимов стохастических колебаний оболочки. Определены критические значения стохастической параметрической нагрузки на оболочку.

Bazhenov V.A., Dehtyaryuk E.S., Lukyanchenko O.O., Kostina O.V.

INVESTIGATION OF STABILITY OF STOCHASTIC PARAMETRIC VIBRATIONS OF SHALLOW SHELLS

A numerical approach to investigate of dynamic behavior and stability of shallow shells under stochastic parametric load was presented. A problem of stochastic stability was formulated as a problem of trivial solutions stability of differential equations in reference to second order momentum functions. The stochastic stability of dynamic states of the shell was investigated. The critical value of stochastic parametric load was determinated.