

УДК 531.31

Дехтярюк Є.С., д-р техн. наук.,
Гончаренко М.В.

АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ ПРУЖНИХ СИСТЕМ В ЗОНАХ ПРОСТИХ І КОМБІНАЦІЙНИХ РЕЗОНАНСІВ ПРИ СТОХАСТИЧНОМУ ПАРАМЕТРИЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Серед багатьох видів динамічного навантаження, що часто зустрічається на практиці, досить значним класом являється параметричне навантаження. При певних характеристиках параметричного навантаження має місце втрата динамічної стійкості основного стану. Конфігурація зон стійкості при такому збудженні має складний вигляд, а резонанси, що збуджуються, важко прогнозуються.

Дослідженням динамічної стійкості в пружних системах при детерміністичному періодичному збудженні займалися Н.М.Беляєв[1], Н.М.Крилов, Н.Н.Боголюбов[2], В.В.Болотін [3].

Нехай динамічний стан системи описується рівнянням

$$M \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} + C \frac{d \bar{x}}{dt} + (K + \mu K_g \cos vt) \bar{x} = 0, \quad (1)$$

де $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ - динамічні змінні, що характеризують стан системи, M , C і K - відповідно матриці мас, демпфірування і жорсткості, K_g - матриця геометричної жорсткості, v та μ - частота і амплітуда гармонійного параметричного збудження відповідно. Вважається, що сили опору руху, які визначаються матрицею C , що відповідають i -ій формі власних коливань, ортогональні j -ій формі власних коливань ($i \neq j$).

Після переходу до нормальних координат рівняння (1) набуде вигляду:

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} + C^* \frac{d \bar{x}}{dt} + (K^* + \mu K_g^* \cos vt) \bar{x} = 0, \quad (2)$$

де $C^* = \Phi^T C \Phi = \text{diag}(2\xi_1 \omega_1, 2\xi_2 \omega_2, \dots, 2\xi_n \omega_n)$,
 $K^* = \Phi^T K \Phi = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2)$, $K_g^* = \Phi^T K_g \Phi = (k_{ij}^g)_{i,j=1}^n$. Матриця Φ створена з n ортонормованих по масі власних векторів, $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ -

власні частоти системи, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - модальні параметри затухання. Далі будемо вважати, що усі модальні параметри затухання однакові і визначаються логарифмічним декрементом споруди

$$\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = \xi = \frac{\delta}{2\pi}.$$

Якщо серед власних частот ω_i немає близьких до величини $\omega_i - \omega_j$, то частина доданків рівняння (2) біля резонансних частот, що досліджуються, будуть мати більш високий порядок малості по відношенню до основних "резонансних" доданків. В такому випадку при $\nu \approx \omega_i$ втрата стійкості буде відбуватись по i -тій нормальній формі [4]. Тоді зони нестійкості знаходяться біля значень частот, що визначаються виразом

$$\nu = \frac{2\omega_i}{m}, \quad \left(\begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ m = 1, 2, \dots \end{matrix} \right), \quad (3)$$

і називаються простими резонансами. Межі таких зон визначаються виразом [3]

$$\nu \approx 2\omega_i \left(1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\mu^2 (k_{ii}^g)^2 - 4\xi_i^2} \right). \quad (4)$$

Аналогічно у випадку комбінаційного резонансу – при $\nu \approx (\omega_i \pm \omega_j)/2$ в рівняннях першого наближення, отриманих з (2), залишаться тільки два рівняння, що описують коливання по i -ій і j -ій нормальним формам [4]. Динамічний стан при втраті стійкості буде визначатись суперпозицією двох власних форм. Зони нестійкості знаходяться біля значень частот, що визначаються виразом

$$\nu = \frac{|\omega_i \pm \omega_j|}{m}, \quad \left(\begin{matrix} i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j \\ m = 1, 2, \dots \end{matrix} \right). \quad (5)$$

Такі явища називаються комбінаційними резонансами і наближені значення меж таких зон можна отримати за допомогою виразу [3]

$$\nu \approx \omega_i + \omega_j \pm \frac{\xi_i \omega_i + \xi_j \omega_j}{\sqrt{\xi_i \xi_j}} \sqrt{\mu^2 k_{ij}^g k_{ji}^g - \xi_i \xi_j}. \quad (6)$$

Ці типи коливань являються основними для системи з періодичним параметричним збудженням. Але на практиці дуже часто до періодичного

збудження додається ще стохастична складова. Наприклад, це може бути пов'язано з тим, що на вібрацію конструкції крім періодичності роботи обладнання впливає неврівноваженість певних елементів. Такий характер навантаження можна представити сумою гармонічної та стохастичної складових. Система (2) набуває вигляду

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} + C^* \frac{d \bar{x}}{dt} + (K^* + K_g (\mu \cos \nu t + f(t))) \bar{x} = 0. \quad (7)$$

де $f(t)$ - центрований стаціонарний випадковий процес.

Досліджується стійкість системи, коли частота періодичного параметричного навантаження лежить в зоні головного простого резонансу (3) та комбінаційного резонансу (5). У першому наближенні приймається, що при побудові областей стійкості в зоні простого резонансу достатньо розглянути одне рівняння системи (7). При цьому доданки, що містять недіагональні елементи матриці геометричної жорсткості, будуть більш високого порядку малості і не враховуються. Аналогічно для дослідження комбінаційних резонансів в першому наближенні достатньо розглянути два рівняння системи (7), в яких будуть відсутні доданки, що містять діагональні елементи матриці геометричної жорсткості [4]. За допомогою методу усереднення для зазначених випадків будуються моментні рівняння і задача побудови областей стійкості зводиться до задачі на власні значення.

Для визначення меж областей параметричної стійкості в зоні простого головного резонансу, що визначається частотою ω_i , розглядається i -те рівняння стохастичної системи (7):

$$\ddot{x}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{x}_i + (\omega_i^2 + k_{ii}^g (\mu \cos \nu t + f(t))) x_i = 0. \quad (8)$$

Приймається, що частота гармонійного збудження знаходиться близько до подвійної власної частоти, а саме можливе відхилення становить малу величину Δ - так зване «розстроювання»:

$$\omega_i^2 = \nu^2 / 4 + \Delta. \quad (9)$$

Спочатку для запису рівнянь в стандартній формі виконується перехід до «повільних» змінних: двох амплітуд:

$$\begin{aligned} x_i(t) &= z_1(t) \cos(\nu t / 2) + z_2(t) \sin(\nu t / 2), \\ \dot{x}_i(t) &= -\frac{1}{2} z_1(t) \nu \sin(\nu t / 2) + \frac{1}{2} z_2(t) \nu \cos(\nu t / 2). \end{aligned} \quad (10)$$

Рішення отриманої системи зводиться до дифузійного марківського процесу, при визначенні коефіцієнтів зносу і дифузії якого отримуємо стохастичні рівняння Іто відносно змінних станів і відповідних їх добутоків [4]. Записується укорочена система рівнянь, праві частини яких отримані шляхом усереднення за період правих частин вихідної системи. Операція усереднення дозволяє представити функцію, що залежить від просторових змінних і часу, наприклад $g(\bar{z}, t)$, і має по часу період T , замінити функцію, що залежить тільки від просторових змінних. Операція усереднення представляється виразом

$$\varphi(\bar{z}) = \frac{1}{T} \int_0^T g(\bar{z}, t) dt. \quad (11)$$

Отже система диференціальних рівнянь будується методом усереднення, що ґрунтується на теоремі Стратоновича-Хасьмінського. Застосувавши операцію математичного сподівання спочатку до обох частин рівнянь Іто відносно змінних станів, отримуємо детерміністичні рівняння відносно моментів першого порядку

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \langle z_1 \rangle \\ \langle z_2 \rangle \end{bmatrix} = [A] \cdot \begin{bmatrix} \langle z_1 \rangle \\ \langle z_2 \rangle \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Аналогічна операція щодо рівнянь Іто відносно добутоків змінних дозволяє отримати рівняння моментів другого порядку:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \langle z_1^2 \rangle \\ \langle z_1 z_2 \rangle \\ \langle z_2^2 \rangle \end{bmatrix} = [B] \cdot \begin{bmatrix} \langle z_1^2 \rangle \\ \langle z_1 z_2 \rangle \\ \langle z_2^2 \rangle \end{bmatrix}. \quad (13)$$

У співвідношеннях (12) і (13) A і B - матриці, коефіцієнти яких залежать від власної частоти і дисипативних характеристик системи, інтенсивності гармонійного параметричного навантаження і характеристик стохастичної складової [5]. Дослідження динамічної стійкості пружної системи зводиться до дослідження стійкості тривіального розв'язку цих систем.

Аналогічна операція виконується при дослідженні комбінаційних резонансів в зоні суми власних частот ω_i та ω_j . Виділяється два рівняння системи (7):

$$\begin{aligned} x_i + 2\xi_i \omega_i \dot{x}_i + \omega_i^2 x_i + [\mu \cos \nu t + f(t)](k_{ii}^g x_i + k_{ij}^g x_j) &= 0, \\ x_j + 2\xi_j \omega_j \dot{x}_j + \omega_j^2 x_j + [\mu \cos \nu t + f(t)](k_{ji}^g x_i + k_{jj}^g x_j) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Приймається, що частота гармонійного впливу ν визначається півсумою величин p_i та p_j , квадрати яких відрізняються від квадратів власних частот ω_i та ω_j на малі величини Δ_i та Δ_j відповідно:

$$\omega_i^2 = p_i^2 + \Delta_i, \quad \omega_j^2 = p_j^2 + \Delta_j, \quad p_i + p_j = 2\nu. \quad (15)$$

Також вважається, що частоти резонансних коливань співмірні, тобто задовольняють співвідношенням

$$p_i + p_j = 2\nu, \quad T = h_1 T_j + h_2 T_i,$$

де T_i і T_j - періоди коливань, h_1 та h_2 - довільні цілі числа. Наявність спільного період T по двом різним формам дозволяє застосувати теорему Стратоновича-Хасьмінського.

Перехід до “повільних” змінних виконується за допомогою виразів

$$\begin{aligned} x_k(t) &= x_{kc} \cos p_k t + x_{ks} \sin p_k t, \\ x_k(t) &= p_k (-x_{kc} \sin p_k t + x_{ks} \cos p_k t), \quad k = i, j. \end{aligned} \quad (16)$$

Після усереднення диференціальні рівняння для перших моментів мають вигляд

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \langle x_{ic} \rangle \\ \langle x_{is} \rangle \\ \langle x_{2c} \rangle \\ \langle x_{2s} \rangle \end{bmatrix} = [R] \cdot \begin{bmatrix} \langle x_{ic} \rangle \\ \langle x_{is} \rangle \\ \langle x_{2c} \rangle \\ \langle x_{2s} \rangle \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Коефіцієнти матриці $R = \{r_{ij}\}$, $i, j = 1 \dots 4$, визначаються співвідношеннями

$$r_{11} = r_{22} = -\omega_1 \xi + n_1 + n_2, \quad r_{12} = -r_{21} = \frac{\Delta_1}{2p_1} - n_3 - n_4, \quad r_{13} = -r_{24} = \frac{\omega_1^2}{4p_1} \mu, \quad (18)$$

$$r_{33} = r_{44} = -\omega_2 \xi + n_5 + n_2, \quad r_{34} = -r_{43} = \frac{\Delta_2}{2p_2} - n_4 - n_6, \quad r_{31} = -r_{42} = \frac{\omega_2^2}{4p_2} \mu,$$

де введені позначення

$$\begin{aligned}
 S(\omega) &= 2 \int_0^{\infty} K_{11}(u) \cos \omega \tau d\tau, \quad \Psi(\omega) = 2 \int_0^{\infty} K_{11}(u) \sin \omega \tau d\tau, \\
 n_1 &= \frac{\omega_1^4}{8p_1^2} k_{11}^2 [S(2p_1) - S(0)], \quad n_2 = \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{8p_1 p_2} k_{12} k_{21} [S(2\nu) - S(p_1 - p_2)], \\
 n_3 &= \frac{\omega_1^4}{8p_1^2} k_{11}^2 \Psi(2p_1), \quad n_4 = \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{8p_1 p_2} k_{12} k_{21} [\Psi(2\nu) - \Psi(p_1 - p_2)], \\
 n_5 &= \frac{\omega_2^4}{8p_2^2} k_{22}^2 [S(2p_2) - S(0)], \quad n_6 = \frac{\omega_2^2}{8p_2^2} k_{22}^2 \Psi(2p_2). \quad (19)
 \end{aligned}$$

Диференційне рівняння для других моментів

$$\frac{d}{dt} \{ \bar{y} \} = [S] \{ \bar{y} \}, \quad (20)$$

де

$$\{ \bar{y} \} = \left\{ \langle x_{1c}^2 \rangle \langle x_{1s}^2 \rangle \langle x_{1c} x_{1s} \rangle \langle x_{1c} x_{2c} \rangle \langle x_{1s} x_{1c} \rangle \langle x_{1s} x_{2c} \rangle \langle x_{1s} x_{2s} \rangle \langle x_{2c} x_{2s} \rangle \langle x_{2c}^2 \rangle \langle x_{2s}^2 \rangle \right\}. \quad (21)$$

Ненульові коефіцієнти матриці $S = \{ s_{i,j} \}$, $i, j = 1 \dots 10$, визначаються співвідношеннями

$$\begin{aligned}
 s_{1,1} &= s_{2,2} = 2(-\omega_1 \xi + m_1 + n_2), \quad s_{1,2} = s_{2,1} = m_2, \quad s_{3,3} = 2(-\omega_1 \xi + m_3 + n_2), \\
 2s_{1,3} &= -s_{2,3} = -s_{3,1} = s_{3,2} = s_{4,6} = s_{5,7} = -s_{6,4} = -s_{7,5} = \frac{\Delta_1}{2p_1} - n_3 - n_4, \\
 2s_{1,4} &= -2s_{2,7} = -s_{3,5} = s_{3,6} = s_{4,9} = s_{5,8} = -s_{6,8} = -s_{7,10} = \frac{\omega_1^2}{4p_1} \mu, \\
 s_{1,9} &= s_{1,10} = s_{2,9} = s_{2,10} = m_4, \quad s_{4,7} = s_{5,6} = s_{6,5} = s_{7,4} = m_2 + m_5, \\
 s_{4,4} &= s_{5,5} = s_{6,6} = s_{7,7} = -\xi(\omega_1 + \omega_2) + n_1 + n_5 - 3n_2, \\
 s_{4,5} &= -s_{5,4} = s_{6,7} = -s_{7,6} = -s_{8,9} = s_{8,10} = s_{9,8} = -2s_{10,8} = \frac{\Delta_2}{2p_2} - n_6 - m_6, \\
 s_{4,1} &= -s_{5,3} = s_{6,3} = -s_{7,2} = s_{8,5} = -s_{8,6} = s_{9,4} = -s_{10,7} = \frac{\omega_2^2}{4p_2} \mu, \\
 s_{8,8} &= 2(-\omega_2 \xi + m_7 + n_2), \quad s_{9,10} = s_{10,9} = m_{10}, \\
 s_{9,9} &= s_{10,10} = 2(-\omega_2 \xi + m_8 + n_2), \quad s_{9,1} = s_{9,2} = s_{10,1} = s_{10,2} = m_9; \quad (21)
 \end{aligned}$$

де прийняті позначення

$$\begin{aligned}
 m_1 &= \frac{\omega_1^4}{8p_1^2} k_{11}^2 [1,5S(2p_1) - S(0)], \quad m_2 = \frac{\omega_1^4}{8p_1^2} k_{11}^2 [S(2p_1) + 2S(0)], \\
 m_3 &= \frac{\omega_1^4}{8p_1^2} k_{11}^2 [S(2p_1) - 1,5S(0)], \quad m_4 = \frac{\omega_1^4}{8p_1^2} k_{12}^2 [S(2\nu) + S(p_1 - p_2)], \\
 m_5 &= \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{8p_1 p_2} k_{11} k_{22} S(0), \quad m_7 = \frac{\omega_2^4}{8p_2^2} k_{22}^2 [S(2p_2) - 1,5S(0)], \\
 m_6 &= \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{8p_1 p_2} k_{12} k_{21} [\Psi(p_1 - p_2) + \Psi(2\nu)], \quad m_8 = \frac{\omega_2^4}{8p_2^2} k_{22}^2 [1,5S(2p_2) - S(0)], \\
 m_9 &= \frac{\omega_2^4}{8p_2^2} k_{21}^2 [S(2\nu) + S(p_1 - p_2)], \quad m_{10} = \frac{\omega_2^4}{8p_2^2} k_{22}^2 [S(2p_2) + 2S(0)]. \quad (22)
 \end{aligned}$$

Дослідження стійкості систем в зонах комбінаційних резонансів зводиться до дослідження стійкості тривіального розв'язку цих систем.

Розглядається задача динамічної стійкості плоскої форми згину балки.

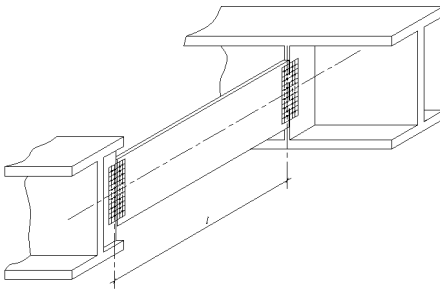


Рис. 1

Нехай пружна балка, шарнірно оперта по кінцях і навантажена в площині найбільшої жорсткості моментами $M(t)$ (рис. 1), знаходиться в режимі сталих коливань. Вказане навантаження являється параметричним по відношенню до згинно-крутильних деформацій, що відбуваються з цієї площини.

У випадку динамічного навантаження дослідження малих відхилень з головної площини балки приводить до задачі динамічної стійкості плоскої форми згину. Поперечний прогин $u(x, t)$ і кут повороту $\varphi(x, t)$ задовольняють рівнянням [3]

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + M(t) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad M(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - GI_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \rho F r^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (23)$$

де GI_k - жорсткість при крутінні; r - радіус інерції перерізу.

Граничні умови мають вигляд

$$u = \varphi = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{і} \quad x = \ell.$$

На рисунках 2 і 3 показані межі областей стійкості балки при стохастичному параметричному навантаженні, стохастична складова якого є випадковим процесом з прихованою періодичністю, а кореляційну функцію можна представити виразом:

$$\langle f(t)f(t+\tau) \rangle = \left[\cos(\theta_\alpha|\tau|) + \frac{\alpha}{\theta_\alpha} \sin(\theta_\alpha|\tau|) \right] \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|), \quad \theta^2 = \theta_\alpha^2 + \alpha^2,$$

$$S(\omega) = \frac{2\sigma^2}{\pi} \frac{\alpha\theta^2}{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}; \quad \Psi(\omega) = \frac{\sigma^2}{\pi} \frac{\omega(\omega^2 - \theta^2 + 4\alpha^2)}{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}, \quad (24)$$

де θ - прихована частота, σ^2 - дисперсія, α - радіус кореляції.

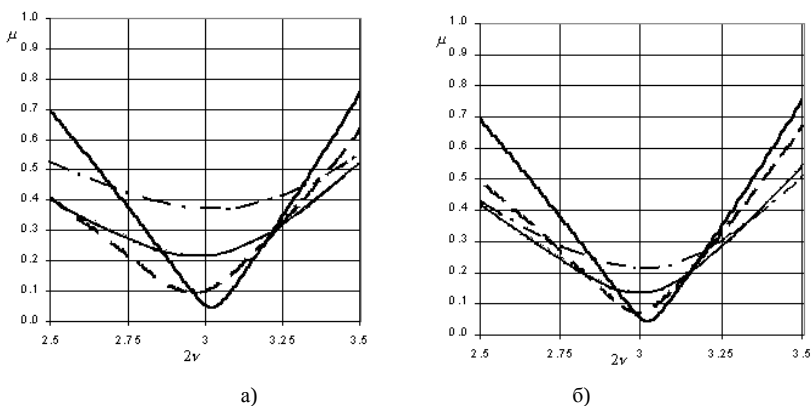


Рис. 2

На рис. 2 показані межі стійкості відносно перших моментів, на рис.3. – відносно других. Графіки побудовані при параметрах $\omega_1 = 0,6 \text{ рад/с}$, $\omega_2 = 2,4 \text{ рад/с}$, $h_1 = 12$, $h_2 = 4$, $\alpha = k(\omega_1 + \omega_2)$, $\theta_\alpha = 1$, $\xi = 0,01$. Суцільна товста лінія відповідає межам стійкості при гармонійному параметричному навантаженні. Інші графіки на рис. 2а) і рис.3а) побудовані при $\sigma^2 = 1.0$; на рис.2б) і рис.3б) – при $\sigma^2 = 2.0$. Штрихові

лінії відповідають $k = 2$, суцільні тонкі - $k = 0.5$, штрихпунктирні - $k = 0.25$.

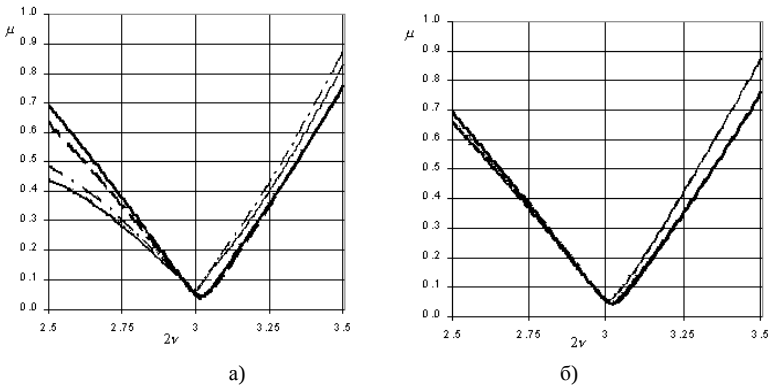


Рис. 3

З наведених графіків видно, що врахування додаткового випадкового навантаження змінює конфігурацію областей нестійкості. Тому при наявності в динамічному навантаженні на споруду стохастичних складових необхідно проводити аналіз впливу додаткового випадкового збудження на динамічну стійкість. Запропонована методика дає можливість оцінювати цей вплив.

1. *Белзев Н.М.* Устойчивость призматических стержней под действием продольных сил // Инж. сооружения и строит.механика.-М.:Путь, 1924.
2. *Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н.* Введение в нелинейную механику.- К.: изд-во АН УССР, 1937. -363с.
3. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. Т.1. Колебания линейных систем / Под ред.В.В.Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – 352с.
4. *Диментберг М.Ф.* Случайные процессы в динамических системах с переменными параметрами. – М.: Наука, 1989. – 175с.
5. *Ariaratnam S.T., Tam D.S.* Parametric random excitation of a damped Mathieu oscillator// ZAMM, 56, 1976. – p.449-452.

Матеріал надійшов до редакції 14.07.04.