

В.С. КРЕМЕЗ, кандидат фізико-математичних наук  
В.Є. ШТАМКОВСЬКИЙ, провідний інженер  
Інститут гідромеханіки Національної академії наук України

## ОСОБЛИВОСТІ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЇ ПІДЗЕМНИХ ВОД В ХІМІЧНО-СУФОЗІЙНИХ ҐРУНТАХ

*Запропоновано математичну модель і метод розрахунку фільтрації підземних вод в хімічно-суфозійних ґрунтах при плівковому, дисперсному або комбінованому засоленні. Приведено приклад розрахунку осушення глибокого котловану і вивчено деякі закономірності суфозійних процесів.*

**Ключові слова:** хімічна суфозія; математична модель; глибокий котлован.

*Предложена математическая модель и метод расчета фильтрации подземных вод в химически суффозионных грунтах при пленочном, дисперсном или комбинированном засолении. Приведен пример расчета осушения глубокого котлована и изучены некоторые закономерности суффозионных процессов.*

**Ключевые слова:** химическая суффозия; математическая модель; глубокий котлован.

*The mathematical model and method of calculation of a filtration of ground waters in chemically suffusion soils is offered at film, disperse or combined solufications. The example of calculation of drainage of a deep foundation ditch is resulted and some laws suffusion processes are studied.*

**Key words:** chemical suffusion; mathematical model; a deep foundation ditch.

**Вступ.** Суттєві відхилення природно-кліматичних умов, від середніх багаторічних, а також зростаюче техногенне навантаження на навколишнє середовище, що відбувається за останні роки в багатьох країнах, зокрема в Україні, призводять до значних змін режиму ґрунтових вод. Підсилення інтенсивності впливу природних і техногенних факторів на гідродинамічний і гідрохімічний режими підземних вод може призвести до структурних змін в деяких типах ґрунтів. Наприклад, в загіпсованих породах внаслідок розчинення і виносу солей із твердої фази ґрунту відбуваються процеси хімічної суфозії. В цьому випадку тверда фаза розглядається як двохкомпонентна система, що створена розчиненими солями і хімічно інертними (у звичайних умовах) нерозчиненими мінеральними частинками ґрунту. Процеси суфозії, зокрема хімічної, призводять до збільшення пористості, проникності, коефіцієнта фільтрації і характеристик міцності

ґрунтів. Деякі задачі фільтрації забруднених вод при експоненціальній залежності коефіцієнта фільтрації від концентрації осаду розглянуто в роботах [1,2], однак подальший аналіз природних і техногенних умов при створенні глибоких котлованів і кар'єрів свідчить про необхідність подальшого розвитку методів моделювання фільтрації води в пористих середовищах із змінними властивостями.

Гострий дефіцит земельних ресурсів під забудову спонукає до будівництва багатоповерхових споруд та ефективного використання підземного простору. Таким чином, створення глибоких котлованів для облаштування підвальних приміщень і підземних гаражів вимагає значного водопониження як в період будівництва, так і експлуатації зазначених споруд. Таким чином, поблизу всіх типів дренажу формуються зони високих швидкостей фільтрації води, що можуть значно інтенсифікувати процеси суфозії в ґрунтах.

**Постановка задачі і деякі особливості чисельного розв'язку рівнянь.** Основу математичної моделі, що наведена далі, складають фундаментальні рівняння фільтрації ґрунтових вод, а також масо переносу і масообміну в пористих середовищах. Розглядається, одновимірна нестационарна фільтрація підземних вод в неоднорідному хімічно-суфозійному ґрунті при плівковому, об'ємному або комбінованому засоленні пористого середовища. Для математичного моделювання зазначених процесів в ґрунтових водах (перших від поверхні землі підземних водах) може бути записана наступна система нелінійних рівнянь:

- рівняння нестационарної фільтрації [3] із урахуванням інфільтраційного живлення ґрунтових вод і залежності коефіцієнта фільтрації від концентрації солей у твердій фазі

$$\mu \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(\sigma)(h-m) \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \varepsilon, \quad V = -k(\sigma) \frac{\partial h}{\partial x}; \quad (1)$$

- рівняння конвективної дифузії із урахуванням надходження солей із інфільтраційними водами і масообміну із твердою фазою [3]

$$n_e \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial C}{\partial x} \right) - V \frac{\partial C}{\partial x} + \varepsilon \frac{(C_s - C)}{h-m} - \rho_s \frac{\partial \sigma}{\partial t}; \quad (2)$$

- рівняння кінетики масообміну між рідкою і твердою фазами [3] (дещо модифіковане для більш універсального урахування різних типів засолення)

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\gamma K_F (\sigma^*)^\varphi (C_{\max} - C), \quad \sigma^* = \frac{\sigma}{\sigma_{\max}}, \quad 0 < x < L. \quad (3)$$

Для замикання системи нелінійних рівнянь (1)-(3) (параметризації задачі) необхідно обрати формули, що відображають залежність коефіцієнта фільтрації ґрунту від концентрації осаду солей. В наведеній моделі припускається, що осад солі у твердій фазі може бути в плівковій, об'ємній або комбінованій формах.

У випадку поверхневого (плівкового) засолення частинок ґрунту [4]

$$k(\sigma^*) = k_0(1 - \sigma^*). \quad (4)$$

У випадку об'ємного (дисперсного) засолення порового простору ґрунту [4]

$$k(\sigma^*) = k_0 \left( 1 + \sigma^* + \frac{1 - \sigma^*}{\ln(\sqrt{\sigma^*})} \right). \quad (5)$$

У випадку комбінованого засолення ґрунту (тобто наявності солей як у плівковій так і дисперсній формах може бути використана експоненціальна залежність [1,4,5]

$$k(\sigma^*) = k_0 \exp\left(-\frac{\sigma^*}{1 - \sigma^*}\right), \quad (6)$$

В записаних вище рівняннях і співвідношеннях прийняті наступні позначення:  $t$  – час, доба;  $x$  – просторова координата, м;  $h = h(x, t)$  – рівень ґрунтових вод (РГВ), м;  $m = m(x)$  – позначки поверхні водоопірного шару ґрунту, м;  $\mu$  – коефіцієнт нестачі насичення (водовіддачі);  $k = k(\sigma)$  – коефіцієнт фільтрації ґрунту, що залежить від концентрації осаду солей у твердій фазі, м/доба;  $k_0$  – коефіцієнт фільтрації чистого незакольтованого ґрунту, м/доба;  $\mathcal{E}$  – інтенсивність інфільтраційного живлення ґрунтових вод внаслідок атмосферних опадів, а також витрат з різноманітних техногенних джерел, м/доба;  $n_e$  – ефективна пористість,  $n_e = n_a(1 - \sigma/\sigma_{max})$ ;  $\sigma_{max}$  – максимальна концентрація осаду солі в твердій фазі, г/кг;  $n_a$  – активна (за рахунок проточних порових каналів і відкритих мікропорожнин в ґрунті) пористість;  $\rho_s$  – щільність розчиняемого твердого осаду, кг/дм<sup>3</sup>;  $C = C(x, t)$  – масова концентрація розчинених солей в рідкій фазі, г/л;  $\sigma = \sigma(x, t)$  – масова концентрація солей в твердій фазі, г/кг;  $D$  – коефіцієнт конвективної дифузії розчинених солей, м<sup>2</sup>/доба; ( $D = D_m + \delta|V|$ );  $\delta$  – коефіцієнт гідродисперсії, м;  $D_m$  – коефіцієнт молекулярної дифузії солей, м<sup>2</sup>/доба;  $\gamma$  – коефіцієнт швидкості розчинення (кристалізації), 1/доба;  $C_{max}$  – концентрація граничного насичення, г/л;  $\phi$  – коефіцієнт засолення, який залежить від характеру розподілу солей в твердій фазі ( $\phi = 0$ , при поверхневому (плівковому) засоленні,  $\phi = 0,5$  або  $1,0$  при об'ємному (дисперсному) засоленні [3];  $C_s$  – концентрація солей в поверхневому джерелі інфільтраційного живлення, г/л;  $K_F$  – коефіцієнт розподілу, дм<sup>3</sup>/кг;  $L$  – довжина області фільтрації, м.

Рівняння (1)-(3) розв'язуються при наступних початкових умовах:

$$h(x, 0) = h^0(x), \quad C(x, 0) = C^0(x), \quad \sigma(x, 0) = \sigma^0(x), \quad (7)$$

де  $h^0(x)$ ,  $C^0(x)$ ,  $\sigma^0(x)$  – значення невідомих функцій в початковий момент часу.

Граничні умови характеризують особливості зовнішніх природних і техногенних впливів на характеристики, що досліджуються, у внутрішньому просторі області моделювання для всього розрахункового періоду.

Для рівняння фільтрації (1) задаються добре відомі граничні умови 1,2,3 роду, що досить докладно наведено, наприклад, в монографії [3]. Для рівняння масопереносу (2) у вхідному перетині, наприклад,  $x = 0$ , частіше за все, задаються граничні умови 1 або 3 роду (умови Данкверста-Бреннера), що наведені в [3].

$$C(0,t) = C_0(t) \quad \text{or} \quad (C(0,t) - C_0)N = D \frac{\partial C(0,t)}{\partial x}, \quad (8)$$

де  $C_0$  – задана концентрація солей у вхідному перетині потоку.

У вихідному перетині пласта, наприклад, при  $x = L$ , задається гранична умова 2 роду [3]

$$\frac{\partial C(L,t)}{\partial x} = 0. \quad (9)$$

Розв'язання рівнянь (1)-(3) з крайовими умовами (7)-(9) і замикаючими співвідношеннями (4)-(6) отримано поширеним і добре вивченим чисельним методом кінцевих різниць (МКР), що добре зарекомендував себе при розв'язанні аналогічних прикладних задач, наприклад, [2]. Було використано неявну різницеву схему із постійним кроком за часом і змінним – по просторі, що надає можливість детального урахування різномасштабних зон неоднорідності ґрунту. При апроксимації конвективної складової у рівнянні масопереносу (2) була використана, так звана, різниця “проти потоку”, що дозволяє уникнути небажаних осциляцій чисельних розв'язків поблизу границь неоднорідності ґрунту.

$$V \frac{\partial C}{\partial x} \approx V_i^{j+1} \frac{C_i^{j+1} - C_{i-1}^{j+1}}{\Delta x_{i-1}}, \text{ for } V_i^{j+1} > 0; \quad V \frac{\partial C}{\partial x} \approx V_i^{j+1} \frac{C_{i+1}^{j+1} - C_i^{j+1}}{\Delta x_i}, \text{ for } V_i^{j+1} < 0, \quad (10)$$

де  $i, j$  – номери просторового і часового кроків,  $\Delta x_{i-1}, \Delta x_i$  – просторові кроки “ліворуч” і “праворуч” від розрахункового вузла.

Розв'язок систем нелінійних різницевих рівнянь, що апроксимують наведені вище диференціальні рівняння і крайові умови, отримано відомим методом прогонки, особливості якого для аналогічних задач добре відомі. Для реалізації обчислювального алгоритму розроблено програму для ПК, за допомогою якої проведено багаточисельні розрахунки.

**Приклад розв'язання модельної задачі.** Моделюється фільтрація ґрунтових вод в водоносному шарі ґрунту між глибоким котлованом, що осушується, борт якого розташований на границі  $x = 0$  і водосховищем при  $x = L = 600$  м. Початкове положення РГВ – статичний горизонт води  $h^0 = 25$  м, а водоносний шар розташований на горизонтальному водоупорі  $m = 0$ .

Рівень ґрунтових вод на границі котловану  $x = 0$  за допомогою горизонтального дренажу практично миттєво знижується до  $h_0 = 10$  м, а рівень води у водосховищі залишається постійним  $h_L = 25$  м на протязі розрахункового періоду часу.

Водоносний шар – неоднорідний по довжині і має включення хімічно-суфозійного ґрунту, що розташовано в інтервалі  $108 \leq x \leq 468\text{м}$  і має такі параметри:  $\sigma^0 = 435\text{г/кг}$ ;  $\sigma_{\max} = 870\text{г/кг}$ ;  $k_0 = 2,2\text{м/доба}$ ;  $\mu = 0,23$ ;  $\varepsilon = 0$ ;  $n_a = 0,35$ ;  $\rho_s = 0,87\text{кг/дм}^3$ ;  $\gamma = 0,00005\text{ 1/доба}$ ;  $K_F = 100\text{дм}^3/\text{кг}$ .

За межами зазначеного вище інтервалу в несудозійному ґрунті прийняти наступні значення параметрів:  $\sigma^0 = 0$ ;  $k_0 = 2\text{ м/доба}$ ;  $\mu = 0,18$ ;  $\varepsilon = 0$ ;  $\gamma = 0$ .

Параметри рівняння масопереносу приймалися наступними:

$$D_m = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{добу}; \delta = 0,01\text{м}; C_{\max} = 180\text{г/л}.$$

Початкові і граничні концентрації солей в розчинній формі складають  $C^0 = C_0 = C_L = 0,7\text{ г/л}$ .

Метою моделювання було вивчення змін РГВ на протязі 1440 діб від початку осушення глибокого котловану, а також дослідження змін коефіцієнта фільтрації, що є свідченням ступеня впливу хімічної судозії на параметри ґрунту.

На рис. 1 показано зміни РГВ по довжині області моделювання в деякі моменти часу розрахункового періоду. Аналіз рисунка, а також інших результатів розрахунків показав, що внаслідок судозії характер фільтрації, змінюється, зокрема, поступово згладжується РГВ в зоні контакту судозійного і несудозійного ґрунтів.

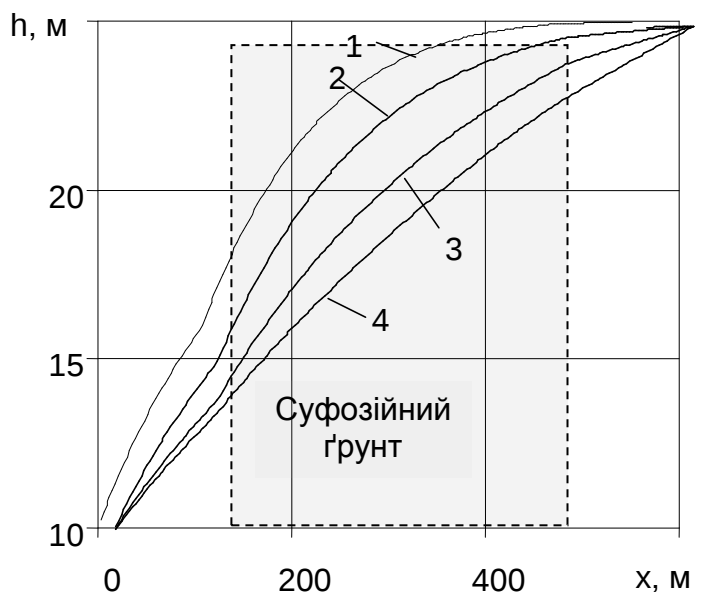


Рис. 1. Положення РГВ в моменти часу: 1 –  $t = 120$  діб;  
2 –  $t = 180$  діб; 3 –  $t = 360$  діб; 4 –  $t = 1440$  діб

На рис.2 наведено зміни коефіцієнта фільтрації судозійного ґрунту поблизу лінії контакту в перетині  $x = 114\text{м}$  на протязі 1440 діб для різних значень коефіцієнта  $\phi$  у рівнянні кінетики розчинення солей (3).

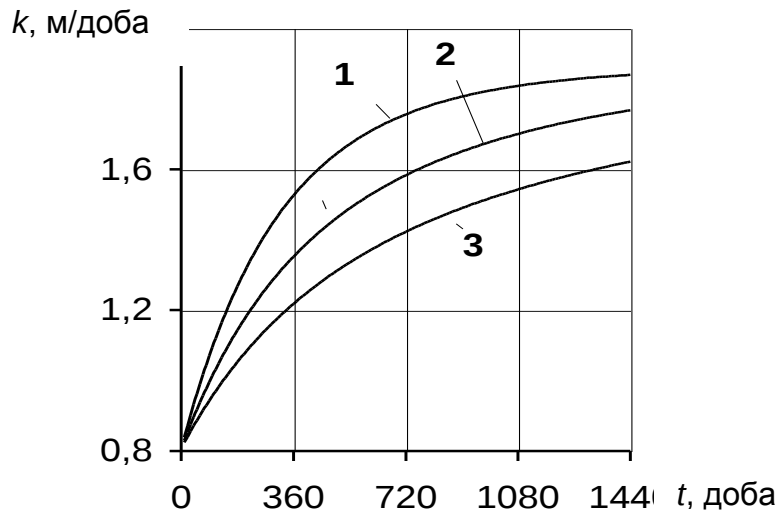


Рис. 2. Змни коефіцієнта фільтрації суфозійного ґрунту в точці  $x = 114$  м.  
Криві 1;2;3 відповідають значенням  $\varphi = 0$ ;  $\varphi = 0,5$ ;  $\varphi = 1$  у формулі (3)

Найбільш відчутними є суфозійні процеси для випадку лінійної кінетики розчинення  $\varphi = 0$  причому відповідно до зменшення концентрації солей у твердій фазі (рис.2) коефіцієнт фільтрації збільшується від 0,84 м/доба (при  $t = 10$  діб) до 1,87 м/доба (при  $t = 1440$  діб). Для випадків нелінійної кінетики розчинення коефіцієнт фільтрації збільшився до 1,76 м/доба при  $\varphi = 0,5$ , і до 1,62 при  $\varphi = 1$ . Отримані залежності свідчать про важливість експериментального встановлення типу засолення для підвищення точності прогнозування режиму ґрунтових вод на довготерміновий проміжок часу.

**Висновки.** Запропонована математична модель і метод розрахунку дозволяють прогнозувати зміни РГВ і фільтраційних параметрів хімічно суфозійних ґрунтів. Такі дослідження важливі для екологічного прогнозування шкідливої дії підземних вод під впливом різноманітних природних і техногенних чинників, а також для наукового обґрунтування проектів систем інженерного захисту територій і окремих споруд від аварійних явищ.

### Список літератури

1. Тугай А.М., Олійник О.Я., Тугай Я.А. Продуктивність водозабірних свердловин в умовах кольматажу: Монографія. – Харків, ХНАМГ, 2004. – 240 с.
2. Добронравов А.А., Кремез В.С. Моделювання фільтрації ґрунтових вод з урахуванням суфозії і кольматції // Проблеми водопостачання, водовідведення та гідраліки. – К: КНУБА, 2006. – Вип. 7. – С. 147-153.
3. Методы прогноза солевого режима грунтов и грунтовых вод. // Под. ред. Н.Н. Веригина. – М.: Колос, 1979. – 336 с.
4. Кремез В.С. Теоретичне обґрунтування залежності коефіцієнта фільтрації пористого середовища від концентрації осаду // Проблеми

водопостачання, водовідведення та гідравліки. – К: КНУБА, 2004. – Вип. 3. – С. 107-112.

5. Philip T. Harte A.E., Leonard F. Konikow b, George Z. Hornberger Simulation of solute transport across low-permeability barrier walls // Journal of Contaminant Hydrology. – 2006. – № 85. – Pp. 247–270.

Надійшло до редакції 15.11.2015

УДК 532.542

С.И. КРИЛЬ, доктор технических наук  
И.В. СКОРОХОД, кандидат физико-математических наук  
В.В. ФАДЕИЧЕВ, главный инженер-гидротехник  
Л.С. ОРЛОВА, ведущий инженер  
Институт гидромеханики НАН Украины

### **К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ РАСХОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭРЛИФТА НА ОСНОВЕ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТЕЧЕНИЯ ГАЗОЖИДКОСТНЫХ СМЕСЕЙ В ВЕРТИКАЛЬНЫХ ТРУБАХ**

*Наведено гідравлічні рівняння для усталеного ізотермічного потоку водоповітряної суміші у вертикальній трубі. Обговорюються шляхи замикання системи гідравлічних рівнянь і побудови на їх основі витратної характеристики ерліфта. Одержано розрахункові залежності для визначення істинних швидкостей руху рідинної і газової фаз суміші.*

**Ключові слова:** ерліфт, гідравлічні рівняння газорідинного потоку, витратна характеристика ерліфта.

*Приведены гидравлические уравнения для установившегося изотермического потока водовоздушной смеси в вертикальной трубе. Обсуждаются пути замыкания системы гидравлических уравнений и построения на их основе расходной характеристики эрлифта. Получены расчетные зависимости для определения истинных скоростей движения жидкой и газовой фаз смеси.*

**Ключевые слова:** эрлифт, гидравлические уравнения газожидкостного потока, расходная характеристика эрлифта.

*The hydraulic equations for the isothermal steady flow of water-air mixture in the vertical pipe are given. The methods of closing of the system of hydraulic equations and building on their basis the flow characteristic of airlift are discussed. The calculating dependences for determining the true velocities of the liquid and gaseous phases of the mixture are obtained.*

**Key words:** airlift, hydraulic equations of gas-liquid flow, flow characteristic of airlift.