

УДК 531.31

М.В. Гончаренко, канд. техн. наук

АНАЛІЗ ВПЛИВУ СТОХАСТИЧНОЇ СКЛАДОВОЇ ПАРАМЕТРИЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА ЗОНИ ДИНАМІЧНОЇ СТІЙКОСТІ ПРУЖНИХ СИСТЕМ

Розглядаються питання, пов'язані з впливом стохастичної складової в параметричному навантаженні на структуру областей динамічної стійкості пружних систем. Межі областей динамічної стійкості будуються, виходячи з означення стійкості відносно моментних функцій. Розглядаються випадки, коли параметричне навантаження зображується гармонічним, стаціонарним або періодично нестаціонарним процесом. На прикладі задачі про динамічну стійкість плоскої форми згину балки побудовані області стійкості, що дозволяє оцінити вплив стохастичної складової параметричного збудження на структуру областей динамічної стійкості.

Вступ. Проблеми теоретичного моделювання динаміки пружних систем постають у різних галузях техніки: будівництві, машинобудуванні, авіаційній і космічній техніці, у нафтовій і газовій промисловості. У більшості випадків саме динамічні процеси визначають надійність і довговічність конструкцій та їх елементів. Значна тривалість експлуатації конструкцій, їх ефективне використання та безаварійна робота потребує наявності даних про реакцію системи на різні види навантаження. Складний характер і визначальна роль динамічних процесів змушують вдосконалювати методи розрахунку, більш повно враховувати вхідні фактори, що впливають на поведінку систем.

Серед багатьох видів динамічного навантаження, що часто зустрічається на практиці, досить значним класом є параметричне навантаження. При певних характеристиках параметричного навантаження має місце втрата динамічної стійкості основного стану. Проводяться дослідження зон динамічної стійкості при різних типах параметричного навантаження, а саме при гармонічному, стаціонарному та періодично нестаціонарному параметричних навантаженнях.

Параметричні коливання пружних систем при періодичному навантаженні. Розглядаються коливання, що виникають у лінійних системах з параметричним збудженням. Рух відповідної дискретної моделі системи можна описати матричним рівнянням виду

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku + \varphi(t)K_G u = 0, \quad (1)$$

де $\bar{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))^T$ – n -вимірний вектор динамічних змінних; M, C, K, K_G – $n \times n$ матриці мас, демпфірування, жорсткості і геометричної жорсткості відповідно; $\varphi(t)$ – випадковий процес, який має структуру

$$\varphi(t) = \mu_0 + \mu_1 \varphi_1(vt) + \mu_2 \psi(t), \quad (2)$$

де $\varphi_1(vt)$ – детерміністична періодична функція; $\psi(t)$ – стаціонарний випадковий процес зі скінченним радіусом кореляції; μ_0, μ_1, μ_2, v – параметри збудження.

Метод усереднення застосовується не безпосередньо до вихідної дискретної моделі пружної системи. Спочатку відбувається перехід до системи рівнянь у нормальних координатах:

$$y_i(t) + 2\xi_i \omega_{0i} \dot{y}_i(t) + \omega_{0i}^2 y_i(t) + \varphi(t) \sum_{k=1}^n g_{ik} y_k(t) = 0, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

де y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – вектор узагальнених координат; ξ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – модальні параметри згасання; ω_{0i} ($i = 1, 2, \dots, n$) – частоти власних коливань системи; $\{g_{ik}\}_{i,k=1}^n$ – компоненти перетвореної матриці геометричної жорсткості.

Перехід до нормальних координат дозволяє проявитись резонансним частотам пружної системи і дає змогу реалізувати метод усереднення більш адекватним чином.

Метод усереднення належить до класу асимптотичних методів. Останні базуються на побудові наближених розв'язків вихідної системи, які при наближенні малого параметра до нуля прямують до розв'язку певної системи, який може бути знайдений [9]. У конкретних розрахунках від нескінченно малих значень параметра переходять до нових, але скінченних значень, за умови, що спектральна щільність збудувального процесу мало змінюється в резонансній області. Метод усереднення можна ефективно застосовувати не тільки до систем, де малий параметр присутній у явній формі, а й у випадках, коли, виходячи з механічних міркувань, можна вважати, що шуканий рух мало відрізняється від певного породжувального руху. При конкретних дослідженнях буде використовуватись саме такий підхід. Але спочатку для чіткого формулювання обчислювальних процедур методу усереднення в систему (3) вводиться малий параметр ϵ . По-перше, параметр ϵ вводиться в зображення (2):

$$\varphi(t) = \varepsilon \mu_0 + \varepsilon \mu_1 \sin 2\nu + \varepsilon^{1/2} \mu_2 \psi(t). \quad (4)$$

Множник $\varepsilon^{1/2}$ при випадковій стаціонарній складовій періодично нестационарного процесу $\varphi(t)$ визначається вимогою, щоб спектральна щільність випадкового процесу $\varepsilon^{1/2} \mu_2 \psi(t)$ мала множник того ж порядку малості, що й інші складові зображення (4).

По-друге, параметр ε вводиться у дисипативні складові рівнянь (3). Таким чином, система (3) записується у вигляді:

$$y_i(t) + 2\varepsilon \zeta_i \omega_{0i} y_i(t) + \omega_{0i}^2 y_i(t) + \left[\varepsilon \mu_0 + \varepsilon \mu_1 \sin 2\nu + \varepsilon^{1/2} \mu_2 \psi(t) \right] g_{ii} y_k(t) = 0, \quad (5) \\ (i = 1, 2, \dots, n).$$

Якщо серед власних частот ω_i немає таких, з яких величина $\omega_i - \omega_j$ являється величиною такого самого порядку, що і ε , то частина доданків в рівнянні (5) біля резонансних частот, що досліджуються, будуть мати більш високий порядок малості по відношенню до основних “резонансних” доданків. Саме, якщо $\nu \approx \omega_i$, то першому наближенню буде відповідати одне рівняння системи (5) i -го степеня вільності, причому ζ_{ij}, g_{ij} , $i \neq j$ будуть відсутні. Аналогічно у випадку комбінаційного резонансу – при $\nu \approx (\omega_i \pm \omega_j)/2$ в рівняннях першого наближення, отриманих з (5), залишаться тільки два рівняння, що описують коливання по i -ій і j -ій нормальним формам, при цьому g_{ii}, g_{jj} будуть більш високого порядку малості. Ці типи коливань являються основними для системи з періодичним параметричним збудженням.

Параметричні коливання пружних систем при періодичному навантаженні. Якщо в параметричному збудженні відсутня стохастична складова ($\mu_2 = 0$), то, як відомо [4], головні області нестійкості системи (1) розташовані біля значень $\nu \approx \omega_i$ (основні резонанси) або $\nu \approx (\omega_i \pm \omega_j)/2$ (комбінаційні резонанси); $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Якщо серед власних частот ω_i немає близьких до величини $\omega_i - \omega_j$, то частина доданків рівняння (5) біля резонансних частот, що досліджуються, будуть мати більш високий порядок малості по відношенню до основних “резонансних” доданків. В такому випадку при $\nu \approx \omega_i$ втрата стійкості буде відбуватись по i -тій нормальній формі [8].

Межі зон стійкості в зоні головного простого резонансу можна отримати за допомогою виразу [4]:

$$v \approx 2\omega_i \left(1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\mu^2 \left(k_{ii}^g \right)^2 - 4\xi_i^2} \right). \quad (6)$$

Аналогічно у випадку комбінаційного резонансу – при $v \approx (\omega_i \pm \omega_j)/2$ в рівняннях першого наближення, отриманих з (5), залишаться тільки два рівняння, що описують коливання по i -ій і j -ій нормальним формам [4]. Динамічний стан при втраті стійкості буде визначатись суперпозицією двох власних форм. Межі зон стійкості визначаються виразом:

$$v \approx \omega_i + \omega_j \pm \frac{\xi_i \omega_i + \xi_j \omega_j}{\sqrt{\xi_i \xi_j}} \sqrt{\mu^2 k_{ij}^g k_{ji}^g - \xi_i \xi_j}. \quad (7)$$

Досліджується система (5) біля цих же частот, при використанні першого наближення асимптотичного методу Крилова-Боголюбова [2] у відповідності з теоремою Стратоновича-Хасьмінського [10].

Умови стійкості пружних систем при стаціонарному параметричному навантаженні. Природним узагальненням періодичного параметричного впливу є модель стаціонарного випадкового впливу, тобто в зображенні (2) $\mu_1 = 0$, $\mu_0, \mu_2 \neq 0$. Вважається, що випадковий процес $\psi(t)$ є достатньо вузькосмуговим відносно пружної системи, яка розглядається. При дослідженні динамічної стійкості використовується визначення стійкості відносно моментних функцій.

Для складання рівнянь методу моментів достатньо вивести стохастичне рівняння Іто відносно змінних стану та їх квадратів, а потім застосувати до цих рівнянь операцію визначення безумовного математичного сподівання. Умова асимптотичної стійкості системи відносно моментних функцій у середньоквадратичному в зоні простого головного резонансу може бути записана наступним чином [9]:

$$\frac{1}{8} \pi \omega_{0i}^2 S(2\omega_{0i}) < \frac{1}{4} \xi_i \omega_{0i}, \quad (8)$$

де $S(\omega)$ – спектральна щільність випадкового параметричного збудження $\mu_2 \psi(t)$.

При дослідженні стійкості в зоні комбінаційного резонансу рівняння визначаються двома частотами ω_i та ω_j , при визначенні операції усереднення вкорочених стохастичних рівнянь постає питання спільного періоду. Вважається, що існують цілі числа n_1 і n_2 , такі, що $n_1\omega_1 \equiv n_2\omega_2$. Тоді можна показати, що по коливаннях по двох різних степенях вільності система буде мати спільний період $T = n_1T_2 + n_2T_1$, де $T_i = 2\pi/\omega_i$. Після усереднення за період T записується вкорочені рівняння в розумінні Стратоновича відносно квадратів амплітуд $\langle A_1^2 \rangle$ і $\langle A_2^2 \rangle$ [8]:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \langle V_1 \rangle \\ \langle V_2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\xi_i\omega_i + \frac{1}{2}g_{ii}^2S(2\omega_i) + \frac{1}{4}g_{ij}g_{ji}S^- & \frac{1}{4}g_{ij}^2S^+ \\ \frac{1}{4}g_{ji}^2S^+ & -2\xi_j\omega_j + \frac{1}{2}g_{jj}^2S(2\omega_j) + \frac{1}{4}g_{ij}g_{ji}S^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle V_1 \rangle \\ \langle V_2 \rangle \end{bmatrix}, \quad (9)$$

де $S^\pm = S(\omega_{0i} + \omega_{0j}) \pm S(\omega_{0i} - \omega_{0j})$.

Система (9) є автономною. Стійкість тривіального розв'язку цієї системи повністю визначається властивістю коренів її характеристичних рівнянь. Таким чином, задача дослідження стійкості в середньоквадратичному системи (9) зводиться до задачі на власні значення.

Умови стійкості пружних систем при періодично нестаціонарному параметричному навантаженні. На практиці часто до періодичного збудження додається ще стохастична складова. Наприклад, це може бути пов'язано з тим, що на вібрацію конструкції крім періодичності роботи обладнання впливає неврівноваженість певних елементів. Такий характер навантаження можна представити сумою гармонічної та стохастичної складових, тобто в представленні (2) $\mu_0, \mu_1, \mu_2 \neq 0$, $\varphi_1(v, t) = \sin 2vt$.

При наявності гармонічної складової у параметричному навантаженні простий головний резонанс проявляється, якщо частота гармонічної складової параметричного збудження $2v$ перебуває безпосередньо в районі частоти $2\omega_{0i}$.

Згідно із загальною схемою методу усереднення виконується перехід до системи рівнянь у стандартній формі. Для цього використовується спеціальне перетворення фазових координат системи. [6,11]. До системи рівнянь у стандартній формі застосовується операція усереднення, яка дозволяє звести задачу до аналізу дифузійного марковського процесу.

Операцію усереднення T -періодичної за часом функції $g(\bar{x}, t)$ можна зобразити виразом $\phi(\bar{x}) = \frac{1}{T} \int_0^T g(\bar{x}, t) dt$. Отже, система диференціальних

рівнянь будуватиметься методом усереднення, що ґрунтується на теоремі Стратоновича-Хасьмінського. Виконавши такі перетворення, отримуємо диференціальні рівняння для перших і других моментів відповідно [6].

Аналогічно випадку стаціонарного випадкового навантаження задача дослідження стійкості зводиться до задачі на власні значення. Обчислюються власні значення при збільшенні інтенсивності випадкового навантаження. Найменше значення інтенсивності, при якому серед власних значень з'являється хоча б одне з додатною дійсною частиною, вважається межею області стійкості. В координатах несуча частота – інтенсивність випадкового параметричного навантаження, будується межа стійкості в зоні параметричного резонансу.

Дослідження динамічної стійкості плоскої форми згину. Розглядається задача динамічної стійкості плоскої форми згину балки. Нехай пружна балка, шарнірно оперта по кінцям і навантажена в площині найбільшої жорсткості моментами $M(t)$ (рис. 1), знаходиться в режимі сталих коливань [3]. Вказане навантаження являється параметричним по відношенню до згинно-крутильних деформацій, що відбуваються з цієї площини. У випадку динамічного навантаження дослідження малих відхилень з головної площини балки приводить до задачі динамічної стійкості плоскої форми згину. Поперечний прогин $u(x, t)$ і кут повороту $\phi(x, t)$ задовольняють рівнянням [4]:

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + M(t) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ M(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - GI_k \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \rho F r^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

де GI_k - жорсткість при крутінні; r - радіус інерції перерізу.

Граничні умови мають вигляд:

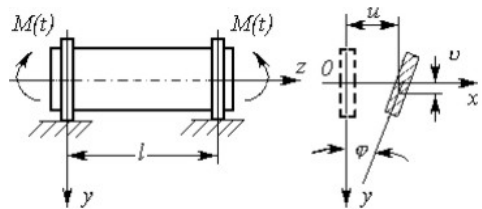


Рис. 1. Плоска форма згину

$$u = \varphi = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = 0 \text{ і } x = l. \quad (11)$$

Рішення шукається у вигляді

$$u(x, t) = \gamma \cdot q_1(t) \sin(\pi x / l); \quad \varphi(x, t) = q_2(t) \sin(\pi x / l), \quad \gamma = r \frac{\omega_2}{\omega_1}. \quad (12)$$

Підставивши (12) в (10) і виконавши перетворення, отримаємо систему (2), в якій $\varsigma_{12} = \varsigma_{21} = g_{11} = g_{22} = k_{11} = k_{22} = 0$, $g_{12} = g_{21} = -h$, $k_{12} = k_{21} = -1$ [11].

При дослідженні зон стійкості в зоні простого параметричного резонансу отримані графіки, аналогічні наведеним в [5] для стаціонарного параметричного навантаження і наведеним в [1,7] для періодично нестаціонарного навантаження, з мінімальною критичною амплітудою в зонах подвійних власних частот згину і кручення.

В зоні комбінаційного резонансу розглянемо три типи навантаження. Перший випадок – навантаження білим шумом. Результати при $\omega_1 = 0,6 \text{ рад/с}$, $\omega_2 = 2,4 \text{ рад/с}$, $n_1 = 12$, $n_2 = 4$, $I = 0,01 \text{ м}^2/\text{с}^3$, $\varsigma = 0,2$, $\varepsilon = 0,1$ зображені на рис.2,а для перших моментів і на рис.2,б для других.

Другий випадок – вважаємо, що $f(t)$ - експоненціально-корельований центрований стаціонарний випадковий процес, такий, що

$$\langle f(t) f(t + \tau) \rangle = \sigma^2 \exp(-\alpha |\tau|), \quad S(\omega) = \frac{2\sigma^2 \alpha}{\alpha^2 + \omega^2}, \quad \Psi(\omega) = \frac{2\sigma^2 \omega}{\alpha^2 + \omega^2}. \quad (13)$$

При параметрах $\omega_1 = 0,6 \text{ рад/с}$, $\omega_2 = 2,4 \text{ рад/с}$, $n_1 = 12$, $n_2 = 4$, $\alpha = k(\omega_1 + \omega_2)$, $\varsigma = 0,1$, $\sigma^2 = 2,0$, $\varepsilon = 0,1$, $k = 2$ зони стійкості для перших моментів представлені на рис.2, в, для других – на рис.2, г.

Для третього навантаження кореляційну функцію представимо у вигляді процесу з прихованою періодичністю:

$$\langle f(t) f(t + \tau) \rangle = \left[\cos(\theta_\alpha |\tau|) + \frac{\alpha}{\theta_\alpha} \sin(\theta_\alpha |\tau|) \right] \sigma^2 \exp(-\alpha |\tau|), \quad \theta^2 = \theta_\alpha^2 + \alpha^2, \\ S(\omega) = \frac{2\sigma^2}{\pi} \frac{\alpha \theta^2}{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}; \quad \Psi(\omega) = \frac{\sigma^2}{\pi} \frac{\omega(\omega^2 - \theta^2 + 4\alpha^2)}{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}. \quad (14)$$

При параметрах $\omega_1 = 0,6 \text{ рад/с}$, $\omega_2 = 2,4 \text{ рад/с}$, $n_1 = 12$, $n_2 = 4$, $\alpha = k(\omega_1 + \omega_2)$, $\theta_\alpha = 1$, $\zeta = 0,1$, $\sigma^2 = 2,0$, $\varepsilon = 0,1$, $k = 2$ зони стійкості для перших моментів представлені на рис.2, д, для других – на рис.2, е.

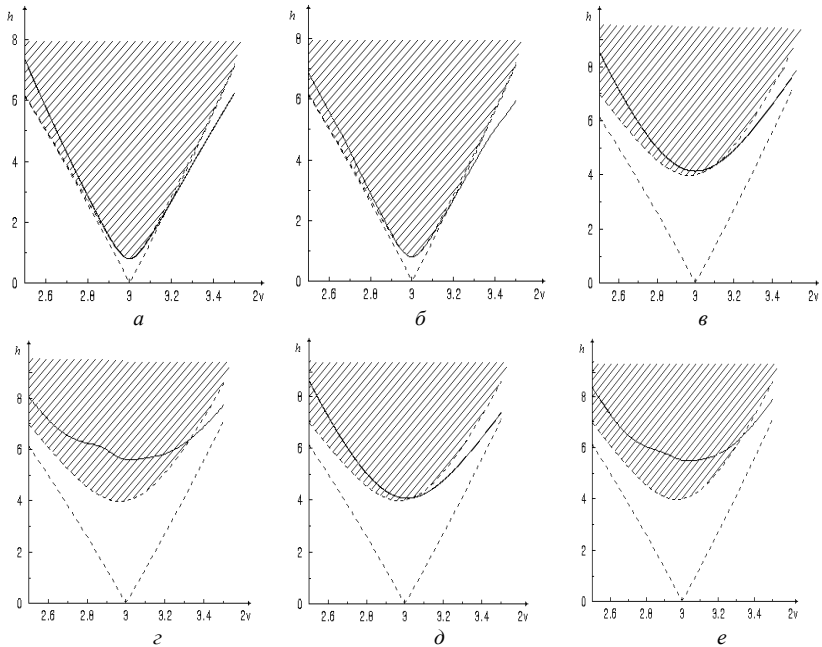


Рис.2. Зони нестійкості балки.

На всіх графіках пунктирною лінією обмежена область нестійкості при детермінованому навантаженні без врахування дисипації енергії, заштрихована область – з врахуванням затухання, суцільною лінією показана межа нестійкості при наявності відповідної стохастичної складової. Як видно з графіків при наявності в параметричному навантаженні стохастичної складової типу білого шуму області майже не змінюються, при експоненціально-корельованому випадковому процесі і процесі з прихованою періодичністю для других моментів спостерігається ефект стабілізації.

Висновки. Проаналізовано вплив стохастичної складової параметричного навантаження на структуру областей динамічної стійкості плоскої форми згину балки. В зоні простого резонансу при

стаціонарному параметричному навантаженні спостерігається ефект стабілізації. При періодично нестаціонарному навантаженні ефект стабілізації спостерігається безпосередньо при частоті гармонічного навантаження, що дорівнює подвійній власній частоті, і ефект дестабілізації поза цією зоною. В зоні комбінаційного резонансу ефект стабілізації або дестабілізації проявляється залежно від параметрів стохастичної складової.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Дехтярюк Є.С., Отрашевська В.В., Гончаренко М.В.* Стабілізація стійкості сталих коливальних режимів динамічних систем при комбінованому збудженні // *Авиационно-космическая техника и технология*, 2004. – вып.3(11). – с.51-58.
2. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974.
3. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1956. – 600 с.
4. *Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. Т.1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В.Болотина.* – М.: Машиностроение, 1978. – 352с.
5. *Ворчак М.В.* Параметричний резонанс в задачах про коливання труб при випадкових пульсаціях тиску внутрішнього потоку // *Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.- техн. збірник* – К.: КНУБА, 2002.- Вип. 71.- С. 107-114
6. *Гончаренко М.В., Дехтярюк Є.С.* Аналіз стійкості пружних систем в зонах простих і комбінаційних резонансів при стохастичному параметричному навантаженні // *Опір матеріалів і теорія споруд*.- К.: КНУБА, 2004, Вип. 74. - с.115-123.
7. *Гончаренко М.В., Дехтярюк Є.С.* Дослідження параметричних резонансів комбінованої пластинчато-стержневої системи // *Опір матеріалів і теорія споруд*: - К.: КНУБА, 2004, Вип. 75. – с.47-56.
8. *Гончаренко М.В., Пошивач Д.В.* Дослідження умов динамічної стійкості пружних систем при стохастичному параметричному впливі // *Вібрації в техніці та технологіях: всеукраїнський науково-технічний журнал.* – Вінниця, 2006. - №2 (44). – с.14-19
9. *Диментберг М.Ф.* Случайные процессы в динамических системах с переменными параметрами. – М.: Наука, 1989. – 175с.
10. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.:Наука,1969
11. *Labou M.* Stochastic stability of parametrically excited random systems // *International applied mechanics.* — Bd. 40 (2004), 10. — Pp. 1175-1183.

Отримано 06.09.10

Гончаренко М.В.

**АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ
ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ НА ЗОНЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ
УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ**

Рассматриваются вопросы, связанные с влиянием стохастического характера параметрической нагрузки на структуры областей динамической устойчивости упругих систем. Границы областей динамической устойчивости строятся, исходя из определения устойчивости относительно моментных функций. Рассматриваются случаи, когда параметрическая нагрузка представляется гармоническим, стационарным или периодически нестационарным случайным процессом. На примере задачи о динамической устойчивости плоской формы изгиба балки построены области устойчивости, что позволяет оценить влияние стохастической составляющей параметрического возбуждения на структуру областей динамической устойчивости.

Goncharenko M.

**ANALYSIS OF PARAMETRIC ADDITIONAL RANDOM LOAD ON DYNAMIC
STABILITY REGIONS OF ELASTIC SYSTEMS**

The effect of parametric additional random excitation on the dynamic stability regions structures of elastic systems is studied. The boundaries of dynamic regions of stability are constructed with regard to moment functions. Cases is considered when parametric load to represent by harmonic, stationary or periodical non stationary process. Regions of dynamic probability stability is obtained for example of the dynamic stability of a beam uniplanar bending that is allowed to appreciate influence of stochastic parametric load on dynamic stability regions structure.