УДК 536.24

канд. ф-м. наук, доцент Наголкіна З.І.,
zonagol@ukr.net, ORCID: 0000-0002-2722-5176,
Київський національний університет будівництва і архітектури

ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ В ЗАДАЧАХ СПРЯЖЕНОГО ТЕПЛООБМІНУ.

Розглядається застосування ітераційного методу до розв'язання інтегрального рівняння, яке моделює спряжену задачу теплообміну. Аналізується збіжність ітерацій в залежності від фізичних параметрів задачі.

Ключові слова: Теплоносії, теплообмін в пограничному шарі, спряжена задача теплообміну, рівняння теплопереносу, ламінарний, турбулентний режими обтікання, інтегральні рівняння, ітераційний процес, збіжність ітерацій.

В будівельній галузі широко застосовуються різноманітні сучасні матеріали, які мають полімерні плоскі поверхні. Розглянемо математичну модель процесу формування плівки з розплаву полімеру за допомогою струменевого охолодження. Теплообмін між матеріалом і теплоносієм в таких системах відбувається в умовах достатньо складного руху 1. З загальної теорії теплообміну в пограничному шарі відомо, що в цьому випадку вплив ефекту неізотермічності достатньо вагомий. І для виконання достовірних, навіть наближених розрахунків теплового стану тіла в потоці теплоносія, необхідно розглядати спряжену задачу теплообміну. Таким чином розглядається обтікання теплоносієм рухомого неперервного плоского тіла. Математична постановка спряженої задачі теплообміну при несиметричному струменевому охолоджені рухомої пластини наведена в 1. Розглянемо математичну модель простішого випадку - рухається розплав, який є неперервною термічно тонкою площиною з певною температурою. Він обтікається теплоносієм з відповідно меншою температурою. В результаті охолодження утворюється певний полімерний матеріал. Причому якість і властивості цього матеріалу залежать від режимів обтікання і відповідно охолодження. Розглянемо рівняння переносу тепла в пластині (розплав полімеру), що рухається зі швидкістю U

$$U\frac{\partial T(x,y)}{\partial x} = a\ \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2} \qquad (1)$$

де T(x,y) – поле розподілу температур, x,y – декартові координати, вісь ох співпадає з напрямом потоку і направлена вздовж поверхні пластини, вісь оу має напрям перпендикуляра до пластини, $a = \frac{\lambda}{c_p \rho}$ - коефіцієнт температуропровідності. Будемо вважати, що ефектом продольної теплопровідності матеріалу можна нехтувати порівняно з конвективним переносом зі швидкістю U. Мають місце наступні граничні і початкові умови. При $x = 0$ (на початку пластини) $T=T_0$, при $x = 0$, $y \to \infty$ температура теплоносія на границі пограничного шару товщиною δ: $T=T_\infty$. Запропонований метод базується на редукції до простішого рівняння і повязаний з усередненням по y в межах пограничного шару та переходом до усередненої температури, яка залежить від x:

$$T(x) = \frac{1}{\delta}\int_0^\delta T(x,y)dy$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння (1). Тоді $\rho c_p U \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda \frac{\partial T}{\partial y}$. Гранична умова третього роду для рівняння (1) має вигляд $q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}$ при $y=\delta$. Згідно з 2 вплив ефекту неізотермічної поверхні на коефіцієнт тепловіддачі враховується за допомогою функції впливу участку, що не обігрівається, а саме

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = \propto (x)\left[T_0 - T_\infty + \int_0^x f(x,\xi)\frac{dT(\xi)}{d\xi}d\xi\right] \qquad (2).$$

де функція впливу є $f(x,\xi) = \left[1 - (\frac{\xi}{x})^{c_1}\right]^{-c_2}$, $\propto (x)$ – коефіцієнт тепловіддачі ізотермічної поверхні. Параметри c_1,c_2 ($c_1 < 1, c_2 < 1$) залежать від режиму обтікання теплоносія і наведені в 2. В цій роботі докладно наведено виведення формул, які використані в 1. Якщо перейти до безрозмірної температури $\theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$, то рівняння (1) з урахуванням (2) буде мати вигляд:

$$\delta \rho c_p U \frac{d\theta}{dx} = -\propto (x)\left[1 + \int_0^x f(x,\xi)\frac{d\theta(\xi)}{d\xi}d\xi\right] \quad (3)$$

Введемо заміну аргумента за формулою $z = \frac{1}{c_p \delta \rho U}\int_0^x \alpha(\xi)d\xi$. Як відомо з 2 $\propto (x) = x^{-\beta}$, де $\beta = \frac{3}{4}$ для ламінарного режиму теплоносія і $\beta = \frac{9}{16}$ для турбулентного. Тоді (3) прийме достатньо простий вигляд

$$\frac{d\theta}{dz} = -1 - \int_0^z F(z,\eta)\frac{d\theta}{d\eta}d\eta \qquad (4)$$

$$\theta(0) = 1,\ F(z,\eta) = \left[1 - (\frac{\eta}{z})^{\frac{c_1}{1-\beta}}\right]^{-c_2}.$$

Проінтегруємо за частинами (4). Враховуючи граничну умову, одержимо

$$\frac{d\theta}{dz} = -1 - [F(z,z)\theta(z) - F(z,0)\theta(0)] + \int_0^z F'(z,\eta)\,\theta(\eta)d\eta$$

$$\frac{d\theta}{dz} = \int_0^z F'(z,\eta)\,\theta(\eta)d\eta.$$

Розкладемо в ряд Тейлора функцію $\theta(\eta)$в околі точки z. Це буде ряд вигляду:

$$\theta(\eta) = \theta(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\frac{d^k\theta}{dz^k}\,(z-\eta)^k == \theta(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^k\theta}{dz^k}\,\frac{1}{k!}\, z^k(z-\eta)^k \big/ z^k,$$

Звідки отримуємо:

$$\frac{d\theta}{dz} = -\,\theta(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^k\theta}{dz^k} z^k \frac{1}{k!}\int_0^z F'(z,\eta)\,(1-\frac{\eta}{z})^k \mathrm{d}\eta,$$

Зробивши інтегрування за частинами, а потім заміну змінних в інтегралі $\frac{\eta}{z} = t,$ $z\,dt = d\eta, t \in [0,1]$ і враховуючи, що $F(z,0) = 1$, маємо:

$$\frac{d\theta}{dz} = -\,\theta(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^k\theta}{dz^k} z^k \frac{1}{k!}\left[-1 + \int_0^1 k\left(1-(t)^{\frac{c_1}{1-\beta}}\right)^{-c_2}(1-t)^{k-1}dt\right].$$

Розкладемо за формулою бінома Ньютона $(1-t)^{k-1}$, і введемо заміну $(t)^{\frac{c_1}{1-\beta}}$=y, тоді інтеграл зведеться до вигляду бета функції, а саме:
B(a,b)=$\int_0^1 y^{a-1}\,(1-\;y)^{b-1}$.
Введемо позначення

$$g_k = \frac{(-1)^{л+1}}{k!}\left\{-1 + \frac{k(1-\beta)}{c_1}\sum_{m=0}^{k-1}\frac{(k-1)!}{m!(k-1-m)!}\;B\left(\frac{(m+1)(1-\beta)}{c_1}, 1-c_2\right)\right\}. \quad (5)$$

Тоді рівняння (4) буде мати вигляд:

$$\frac{d\theta}{dz} = -\,\theta(z) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{d\theta^k}{dz^k} z^k g_k \qquad (6)$$

де g_k має вигляд (5), параметри β, c_1, c_2 залежать від режимів обтікання. Для різних умов обтікання поверхонь обмежених тіл вони визначені в 2 та 3. Так при турбулентному режимі обтікання $\mathrm{c}_2 = 0.063,$ а при ламінарному

$c_2 = 0.37.$ При цьому послідовність (5) збігається до 0. Тому суттєвий вклад дають перші два - три члени послідовності. Перетворимо тотожньо рівняння (4):

$$\frac{d\theta}{dz} = -\theta - g_1 z\frac{d\theta}{dz} + Q(z,\theta) \qquad (7)$$

$$Q(z,\theta) = -1 - \int_0^z F(z,\eta)\frac{d\theta}{d\eta}d\eta + \theta + g_1 z\frac{d\theta}{dz}. \qquad (8)$$

Розглянемо ітераційну схему для неоднорідного рівняння (7). В якості 0–наближення розв'яжемо диференціальне рівняння наступного вигляду:

$$\frac{d\theta_0}{dz} = -\theta_0 - g_1 z\frac{d\theta_0}{dz},\ \theta(0) = 1.$$

$$\frac{d\theta_0}{dz} = -\frac{\theta_0}{1+g_1 z}.$$

$$\theta_0 = (1+g_1 z)^{-1/g_1}.$$

Тоді 1-е наближення

$$\frac{d\theta_1}{dz} = -\frac{\theta_1}{1+g_1 z} + Q(z,\theta_0)\ ,\ \theta_1(0) = 1$$

Тоді n- наближення

$$\frac{d\theta_n}{dz} = -\frac{\theta_n}{1+g_1 z} + Q(z,\theta_{n-1})\ ,\ \theta_n(0) = 1.$$

За методом варіації довільної сталої отримаємо n- ітерацію розв'язку інтегро–диференціального рівняння

$$\theta_n(z) = \frac{1}{(1+g_1 z)^{1/g_1}}\left(1 + \int_0^z Q(t,\theta_{n-1})(1+g_1 t)^{1/g_1}\mathrm{dt}.\right. \qquad (9)$$

Дослідимо збіжність такого ітераційного процесу (9). Розглянемо інтегральне рівняння (4) відносно похідної $\frac{d\theta}{dz}$. Як відомо з 4, при $c_2 < 1$ ядро рівняння (4) може бути приведено до вигляду $K(x,z) = \frac{L(x,z)}{(x-z)^{c_2}}$. При цьому рівняння має єдиний розв'язок, який може бути отриманий методом послідовних наближень. При $c_2 < 0{,}5$ неперервним буде ядро $\mathrm{K}(x,z)$. Будемо вважати, що похідні $\theta'_n(z)$ і функції $\theta_n(z)$ звязані співвідношенням. Існує таке довільне число С, що

$$|\theta'_n - \theta'_{n-1}| < C|\theta_n - \theta_{n-1}| \qquad (10)$$

Для доведення збіжності ітераційного процесу в просторі неперервних функцій розглянемо відповідну норму

$$\max_{0<t<z}|\theta_n(t)-\theta_{n-1}(t)| =$$

$$\max_{0<t<z}\left|\frac{1}{(1+g_1t)^{1/g_1}}\int_0^t (Q(x,\theta_{n-1})-Q(x,\theta_{n-2}))(1+g_1x)^{1/g_1})dx\right| \le$$

$$\max_{0<t<z}\left|\int_0^t (Q(x,\theta_{n-1})-Q(x,\theta_{n-2}))dx\right| \le \max_{0<t<z}\int_0^t |Q(x,\theta_{n-1})-Q(x,\theta_{n-2})|dx$$

$$=\int_0^z |Q(x,\theta_{n-1})-Q(x,\theta_{n-2})|dx.$$

Підставимо (8) в підінтегральний вираз отримаємо відповідну нерівність

$$|Q(x,\theta_{n-1})-Q(x,\theta_{n-2})| \le \left|\int_0^x F(x,\eta)(\theta'_{n-1}(\eta)-\theta_{n-2}(\eta)d\eta\right| +$$

$$|\theta_{n-1}(x)-\theta_{n-2}(x)|+g_1x|\theta'_{n-1}(x)-\theta'_{n-2}(x)|.$$

Враховуючи нерівність Коші-Буняковського 5 для інтегралу, а також співвідношення (10), будемо мати

$$|Q(x,\theta_{n-1})-Q(x,\theta_{n-2})| \le \left\{\int_0^x (F(x,\eta)^2 d\eta\right\}^{1/2}\left\{\int_0^x |(\theta'_{n-1}(\eta)-\right.$$
$$\left.\theta_{n-2}(\eta)|^2 d\eta\right\}^{1/2} + |\theta_{n-1}(x)-\theta_{n-2}(x)|+g_1x|\theta'_{n-1}(x)-\theta'_{n-2}(x)|,$$

Розглянемо $\left\{\int_0^x (F(x,\eta)^2 d\eta\right\}^{1/2}$. Враховуючи явний вигляд підінтегральної функції зведемо інтеграл до бета−функції.

$$\int_0^x (F(x,\eta)^2 d\eta = \int_0^x (1-\left(\frac{\eta}{x}\right)^{c_1/1-\beta})^{-2c_2}\mathrm{d}\eta.$$

Зробивши заміну $\left(\frac{\eta}{x}\right)^{c_1/(1-\beta)}$=t, отримаємо бета−функцію B(a,b).

$$\int_0^x (1-\left(\frac{\eta}{x}\right)^{c_1/1-\beta})^{-2c_2} = \frac{x(1-\beta)}{c_1}\int_0^1 (1-t)^{-2c_2}t^{1-\beta/c_1-1}\mathrm{dt}=\frac{x(1-\beta)}{c_1}\ \mathrm{B}(\frac{(1-\beta)}{c_1}, 1\text{-}\ 2c_2)$$

Нехай поверхня обмежена, тобто поточна координата x$\in[0,l]$. Тоді будемо вважати, що $\left|\frac{x(1-\beta)}{c_1}\ \mathrm{B}(\frac{(1-\beta)}{c_1}, 1-\ 2c_2)\right|^{1/2} < M$. Тоді:

$$\max_{0<t<z}|\theta_n(t)-\theta_{n-1}(t)| \le \int_0^z (MCx^{1/2}+Cg_1x+1)\max_{0\le\eta\le x}|\theta_{n-1}(\eta)-\theta_{n-2}(\eta)|\,dx$$

Позначимо $(MCl^{1/2}+Cg_1l+1)=A$. Тоді отримаємо:

$$\max_{0<t<z}|\theta_n(t)-\theta_{n-1}(t)| \le \int_0^z A\max_{0\le\eta\le x}|\theta_{n-1}(\eta)-\theta_{n-2}(\eta)|\mathrm{dx}.$$

Ітерація цієї формули дає співвідношення

$$\max_{0\le t\le z}|\theta_n(t)-\theta_{n-1}(t)| \le \frac{A^{n-1}z^{n-1}}{(n-1)!}\max_{0\le t\le z}|\theta_1(t)-(t)| \to 0.$$

Це і доводить збіжність даного ітераційного процесу. Диференціальне рівняння (7) чисельно розв’язувалось за методом Рунге Кутта, а потім за ітераційною формулою. Методом послідовних наближень будувався розв’язок інтегрального рівняння. При цьому ітераційний процес вважався завершеним, якщо значення функції в наступній ітерації майже не відрізнялись (з заданою точністю) від попередніх. При цьому його збіжність залежить від параметру g_1, який в свою чергу визначається гідродинамічними характеристиками. Показано, що при турбулентному режимі охолодження, тобто при $c_2=0.063$ вже при $n=3$ дані експериментальної кривої співпадають.

Література.

1. Гречаный О.А., Наголкина З.И., Сенатос В.А. Теплообмен при струйном охлаждении движущейся непрерывной пластины. – Промтеплотехника, 1986, т.8, 6. - С .3-10.

2. Дорфман А.Ш. Теплообмен при обтекании неизотермических тел. – М.: Машиностроение , 1982. – 191 с.

3. Гречаный О.А. Теплообмен при продольном обтекании цилиндрических и плоских движущихся неизотермических поверхностях. Автореф. дис. канд. техн. наук. – Киев, 1976. - 23 с.

4. Смирнов В.И. Курс высшей математики. - М.: Наука, 1974. - Т.4. - 336 с.

5. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. - М.: Наука.,1967.

канд. ф-м. наук, доцент Наголкина З.І.,
Киевский национальный университет строительства и архитектуры

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ СОПРЯЖЕННОГО ТЕПЛООБМЕНА

Рассматривается применение итерационного метода для решения интегрального уравнения, которое моделирует сопряженную задачу теплообмена. Анализируется сходимость итераций в зависимости от физических параметров задачи.

Ключевые слова: Теплоносители, теплообмен в пограничном слое, сопряженная задача теплообмена, уравнение теплопереноса, ламинарный и турбулентный режимы обтекания, интегральные уравнения, итерационный процесс, сходимость итераций.

Phd, assistant professor Naholkina Zoia,
Kiev National University of Construction and Architecture

INTEGRAL EQUATIONS IN CONJUGATE HEAT TRANSFER PROBLEMS

The application of the iterative method for solving the integral equation that simulates the conjugate heat exchange problem is considered. The convergence of iterations is analyzed depending on the physical parameters of the problem.

Keywords: Heat transfer media, heat transfer in the boundary layer, the conjugate heat transfer problem, heat transfer equation, laminar and turbulent flow modes, integral