

УДК 539.3

Ю.В. Ворона, канд. техн. наук
 О.В. Геращенко, канд. техн. наук
 О.С. Русанова

ГРАНИЧНО-ЕЛЕМЕНТНІ ПІДХОДИ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ДЕФОРМУВАННЯ МАСИВІВ З ТРІЩИНАМИ

Аналізуються особливості дослідження коливань масивних елементів конструкцій з тріщинами за гранично-елементною методикою, що базується на регуляризації з використанням теореми Стокса. Розроблена методика порівнюється з іншим чисельним підходом, пов'язаним з обчисленням скінченної частини гіперсингулярного інтегралу. Показано, що останній алгоритм є більш ефективним.

При усталених гармонійних коливаннях масивних елементів конструкцій, послаблених тріщинами, напруження σ_{jk} в регулярних точках границі Γ можуть бути знайдені за формулою Соміліани [1,2]:

$$\frac{1}{2} \sigma_{jk}(\bar{x}_0) = \oint_{\Gamma} \tau_l(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y - \oint_{\Gamma} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y, \quad j, k, l=1, 2, 3, \quad (1)$$

де u_l і τ_l – амплітудні значення компонент векторів відповідно граничних переміщень і напружень; $\bar{x}_0, \bar{y} \in \Gamma$; D_{jkl} та S_{jkl} – узагальнені похідні матриці фундаментальних розв'язків задачі U_{jk} (матриці В.Д.Купрадзе [3]), а саме $D_{jkl}(\bar{x}, \bar{y}) = -C_{jkm} U_{ml}(\bar{x}, \bar{y})$, $S_{jkl}(\bar{x}, \bar{y}) = -C_{jkm} n_s C_{slrq} U_{mr,ql}(\bar{x}, \bar{y})$, n_j – компонента вектора зовнішньої нормалі в точці $y \in \Gamma$, C_{jklm} – тензор пружних констант, який задається виразом $C_{jkm} = \lambda \delta_{jk} \delta_{ml} + \mu (\delta_{jl} \delta_{mk} + \delta_{jm} \delta_{kl})$; λ і μ – константи Ляме. Крім того у виразі (1) використані позначення

$$\oint_{\Gamma} \tau_l(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} \tau_l(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\}; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y &= \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + u_l(\bar{x}_0) \int_{\Gamma_\varepsilon} S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\}, \quad (3) \end{aligned}$$

причому Γ_ε – це частина границі Γ , яка вирізається сферою малого радіусу ε з центром в точці x_0 , а Γ_s – це частина вказаної сфери, занурена всередину тіла.

Отже, $\oint_{\Gamma} \tau_l(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y$ – це головне за Коші значення невласного інтегралу $\int_{\Gamma} \tau_l(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y$, а $\oint_{\Gamma} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y$ – це скінченна за

Адамаром [4] частина невласного інтегралу $\int_{\Gamma} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y$.

Вираз (1) може використовуватись для знаходження незаданих граничними умовами переміщень і напружень, тобто стає за таких умов гіперсингулярним граничним інтегральним рівнянням (ГІР). Наприклад, якщо розглядається симетричний напружений стан в нескінченному просторі, послабленому тріщиною нормального відриву, яка розташована в площині симетрії $x_3=0$, і до берегів якої прикладене нормальне рівномірно розподілене навантаження з амплітудою q , формула (1) спрощується і набуває вигляду [5]:

$$2 \int_{\Gamma^+} u_3(\bar{y}) S_{333}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = q, \quad \bar{x}_0, \bar{y} \in \Gamma^+, q = const, \quad (4)$$

де Γ^+ – це поверхня верхнього берегу тріщини.

Вираз (4) є інтегральним рівнянням відносно u_3 (амплітуд нормальних переміщень точок границі тріщини). В роботі [5] був розроблений алгоритм розв'язання гіперсингулярного ГІР (4). Цей алгоритм базується на підході, який має назву регуляризація після дискретизації [6], оскільки він використовує припущення про те, що точка \bar{x}_0 розташована на плоскому фрагменті поверхні, переміщення на якому можуть бути подані у вигляді поліному. За таких умов Γ_s стає півсферою, і граничний перехід у виразі (3) може бути виконаний за методикою, викладеною в [5].

Існує також інший підхід, який має назву регуляризація перед дискретизацією [6] і виходить з припущення, що переміщення поблизу точки \bar{x}_0 є диференційованими функціями. При цьому застосування теореми Стокса [7] дозволяє надати гіперсингулярному інтегралу (3) наступного вигляду:

$$\begin{aligned} \oint_{\Delta\Gamma} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y &= \int_{L_{\Delta}} u_k(\bar{y}) C_{ijml} e_{isl} [D_{skm}(\bar{x}_0, \bar{y})] dx_l - \\ &- \int_{\Delta\Gamma} \frac{\partial u_k(\bar{y})}{\partial s_l} C_{ijml} e_{isl} [D_{skm}(\bar{x}_0, \bar{y})] d\Gamma_y + \rho \omega^2 \int_{\Delta\Gamma} u_k(\bar{y}) F_{ijk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y, \end{aligned} \quad (5)$$

де L_Δ – контур фрагмента $\Delta\Gamma$, в межах якого компоненти нормалі \vec{n} є неперервними величинами; ρ – густина пружного середовища; ω – кутова частота коливань; e_{ijk} – символ Леві-Чивіта, \vec{s}_t – деякий одиничний вектор, перпендикулярний до нормалі в точці у поверхні Γ . Значимо також, що перший з інтегралів в правій частині виразу (5) є регулярним, третій має слабку сингулярність, а другий – сильну сингулярність, яка втім, не є нездоланною перешкодою [8].

Якщо розглядається інтеграл по всій поверхні об'єкту розрахунку Γ , тобто по сукупності фрагментів $\Delta\Gamma$, то відповідний вираз може бути записаний наступним чином:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} u_i(\vec{y}) S_{jkl}(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y &= \sum_{L_\Delta} \int u_k(\vec{y}) C_{ijml} e_{tsl} [D_{skm}(\vec{x}_0, \vec{y})] dx_t - \\ - \sum_{\Delta\Gamma} \int \frac{\partial u_k(\vec{y})}{\partial s_t} C_{ijml} e_{tsl} [D_{skm}(\vec{x}_0, \vec{y})] d\Gamma_y &+ \rho \omega^2 \oint_{\Gamma} u_k(\vec{y}) F_{ijk}(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y \quad . \quad (6) \end{aligned}$$

При цьому слід мати на увазі, що контур, як сукупність границь між будь-якими парами фрагментів, обходить двічі – перший раз в прямому напрямі (границя першого фрагменту), а другий раз в зворотному (границя другого фрагменту). Оскільки переміщення точок границі є неперервними функціями, то повна сума контурних інтегралів дорівнює нулю. В результаті, застосовуючи (6) та виконуючи граничний перехід [2], отримуємо альтернативну інтегро-диференціальну форму граничного рівняння для напружень:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma_{jk}(\vec{x}_0) &= \oint_{\Gamma} \tau_l(\vec{y}) D_{jkl}(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y + \oint_{\Gamma} \frac{\partial u_k(\vec{y})}{\partial s_t} C_{ijml} e_{tsl} [D_{skm}(\vec{x}_0, \vec{y})] d\Gamma_y - \\ &- \rho \omega^2 \oint_{\Gamma} u_k(\vec{y}) F_{ijk}(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y \quad , \quad (7) \end{aligned}$$

причому всі інтеграли в правій частині ГІР (7) слід розуміти за Коші.

Рівність (7) так само, як і (1) може використовуватись в якості алгоритмічної основи чисельної методики, спрямованої на розв'язання за методом потенціалу задачі про коливання масивного пружного об'єкту, послабленого тріщинами. Якщо знову розглядається симетричний напружений стан в нескінченному просторі, послабленому тріщиною нормального відриву, то рівняння (7) спрощується і набуває вигляду:

$$\frac{\lambda + 2\mu}{2\pi} \left\{ \oint_{\Gamma} \left[\frac{\partial u_3(\bar{y})}{\partial x_1} r_{,1} + \frac{\partial u_3(\bar{y})}{\partial x_2} r_{,2} \right] \left[\frac{\nu}{1-\nu} T_1(r) - T_2(r) \right] d\Gamma_y - \right. \\ \left. - \frac{\rho\omega^2}{\mu} \oint_{\Gamma} u_3(\bar{y}) U_0(r) d\Gamma_y \right\} = q, \quad (8)$$

де $U_0(r) = \exp(z_2)r^{-1} [1 - z_2^{-1} + z_2^{-2}] + \beta \exp(z_1)r^{-1} [z_1^{-1} - z_1^{-2}]$;
 $z_k = \frac{i\omega r}{C_k}$, $k=1,2$; $\beta = \frac{\mu}{\lambda+2\mu}$; $r = \sqrt{(x_k - y_k)(x_k - y_k)}$; $r_{,j} = \frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{y_j - x_j}{r}$.
 $T_1 = -2 \exp(z_2)r^{-2} [1 - 3z_2^{-1} + 3z_2^{-2}] + \exp(z_1)r^{-2} [z_1 - 1 - 2\beta(1 - 3z_1^{-1} + 3z_1^{-2})]$;
 $T_2 = \exp(z_2)r^{-2} [z_2 - 3 + 6z_2^{-1} - 6z_2^{-2}] - 2\beta \exp(z_1)r^{-2} [1 - 3z_1^{-1} + 3z_1^{-2}]$.

Найбільш відповідальною та трудомісткою частиною процесу чисельного розв'язування системи сингулярних ГР є обчислення інтегралів по тому граничному елементу, на якому розташовано полюс \bar{x}_0 . Якщо прийнята кусково-квадратична апроксимація невідомих переміщень, то при інтегуванні по елементу, що містить \bar{x}_0 , можна користуватись поданнями

$$u_3(\bar{y}) = u_3(\bar{x}_0) + \frac{\partial u_3(\bar{x}_0)}{\partial x_\alpha} \cdot r \cdot r_{,\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_3(\bar{x}_0)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \cdot r^2 \cdot r_{,\alpha} r_{,\beta}; \quad (9)$$

$$\frac{\partial u_3(\bar{y})}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial u_3(\bar{x}_0)}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial^2 u_3(\bar{x}_0)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \cdot r \cdot r_{,\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (10)$$

Перенесемо початок координат в т. \bar{x}_0 та виділимо з області інтегрування круг Γ_R радіусу R_Δ з центром в полюсі (рис. 1).

Використовуючи локальні подання (9-10) та полярну систему координат, в якій $r_{,1} = \cos \theta$; $r_{,2} = \sin \theta$, отримуємо

$$\oint_{\Gamma_R} u_3(\bar{y}) U_0(r) d\Gamma_y = \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_R - \Gamma_\varepsilon} u_3(\bar{y}) U_0(r) \Gamma_y \right\} =$$

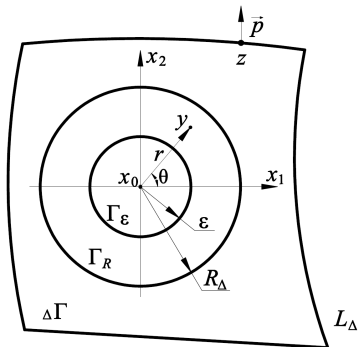


Рис. 1. Параметризація сингулярного ГЕ

$$= 2\pi \left\{ u_3(x_0) H_0(R_\Delta) + \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 u_3(\bar{x}_0)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3(\bar{x}_0)}{\partial x_2^2} \right] H_2(R_\Delta) \right\}, \quad (11)$$

де

$$H_0(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^x U_0(r) r dr = x \exp(z_2) \left[\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_2^2} \right] + \frac{x \exp(z_1)}{z_2^2} - \frac{z_1}{z_2};$$

$$H_2(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^x U_0(r) r^3 dr =$$

$$= \frac{iC_2^3}{\omega^3} \exp(z_2) [4 - 3z_2 + z_2^2] + \frac{iC_1^3}{\omega^3} \beta \exp(z_1) (z_1 - 2) - 4 \frac{iC_2^3}{\omega^3} + 2 \frac{iC_2^2 C_1}{\omega^3},$$

$$\oint_{\Gamma_R} \left[\frac{\partial u_3(\bar{y})}{\partial x_1} r_{,1} + \frac{\partial u_3(\bar{y})}{\partial x_2} r_{,2} \right] \left[\frac{\nu}{1-\nu} T_1(r) - T_2(r) \right] d\Gamma_y =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \left[\int_{\Gamma_R - \Gamma_\varepsilon} \left[\frac{\partial u_3(\bar{y})}{\partial x_1} r_{,1} + \frac{\partial u_3(\bar{y})}{\partial x_2} r_{,2} \right] \left[\frac{\nu}{1-\nu} T_1(r) - T_2(r) \right] d\Gamma_y \right\} =$$

$$= \pi \left[\frac{\partial^2 u_3(\bar{x}_0)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3(\bar{x}_0)}{\partial x_2^2} \right] \left[\frac{\nu}{1-\nu} I_1(R_\Delta) - I_2(R_\Delta) \right], \quad (12)$$

де

$$I_1(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^x T_1(r) r^2 dr = \frac{iC_2}{\omega} \exp(z_2) \left[2 - \frac{6}{z_2} \right] + \frac{2i}{\omega} (2C_2 - C_1) -$$

$$- \frac{iC_1}{\omega} \exp(z_1) \left[(1 - 2\beta) z_1 - 2(1 - 2\beta) - \frac{C_2}{C_1} \frac{6}{z_2} \right];$$

$$I_2(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^x T_2(r) r^2 dr = \frac{iC_2}{\omega} \exp(z_2) \left[4 - \frac{6}{z_2} + z_2 \right] +$$

$$+ \frac{2iC_2}{\omega} \left(1 - 2 \frac{C_2}{C_1} \right) - \frac{iC_1}{\omega} \exp(z_1) \beta \left[2 - \frac{6}{z_1} \right].$$

Таким чином, одержані компактні вирази для визначення сингулярних частин невластних інтегралів по граничному елементу, що містить полюс x_0 . Чисельне інтегрування по решті поверхні не викликає утруднень. Зазначимо також, що на елементах, які розташовані біля фронту тріщини, зазвичай використовується спеціальна апроксимація, що враховує характер поведінки переміщень та їх похідних в цій зоні. Вирази (9), (10) при цьому стають наближеними, але зменшуючи розмір R_Δ , завжди можна обчислити сингулярні частини інтегралів з лівої частини рівності (8) з якою завгодно точністю.

Методика розв'язання системи рівнянь (8), побудована з використанням співвідношень (9)-(12), була застосована для аналізу гармонійних коливань пружного простору, послабленого дископодібною тріщиною, до берегів якої прикладене нормальне осцилююче навантаження. Результати розрахунків у вигляді графіків залежностей динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) від частоти коливань показані на рис. 2. При цьому кількість граничних елементів вздовж радіусу тріщини дорівнювала п'яти.

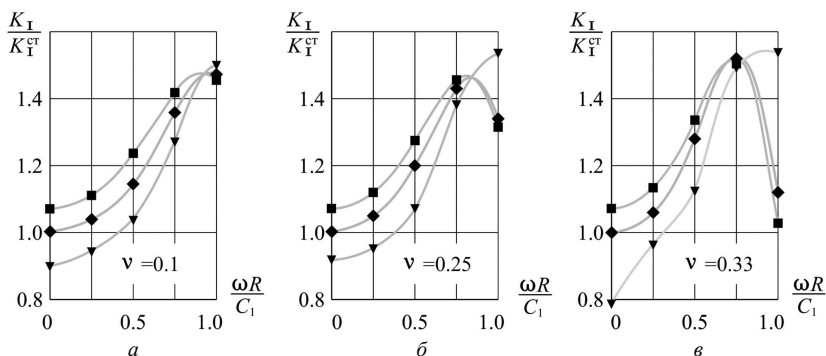


Рис. 2

Бачимо, що незважаючи на досить густу сітку, розрахункові дані (лінії, позначені трикутниками) суттєво відрізнялись від еталонних [9] (лінії, позначені ромбами). Так при значенні коефіцієнту Пуассона $\nu=0,1$ відносна похибка розрахунків знаходилась в межах 10%, при $\nu=0,25$ похибка за великих значень параметра частоти доходила до 14,5%, а при $\nu=0,33$ перевищувала 30% (табл. 1). І хоча максимальні значення виявились досить добре узгодженими (похибка була меншою 2%), суттєва розбіжність значень похибки свідчить не на користь достовірності розробленої методики.

Проведені додаткові дослідження показали, що велика похибка розрахункових даних зумовлена обраною колокаційною схемою розв'язання задачі, в якій полюси розташовуються не на контурах, а всередині граничних елементів. При цьому функції форми, а слідом за ними і граничні переміщення є розривними функціями, тому нехтування контурними інтегралами при підстановці виразу (6) до формули Соміліани для напружень є невиправданим. Отже, при розташуванні точок колокації всередині ГЕ граничне інтегро-диференціальне рівняння для напружень має бути записано наступним чином:

$$\frac{1}{2} \sigma_{jk}(\bar{x}_0) = \oint_{\Gamma} \tau_l(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \oint_{\Gamma} \frac{\partial u_k(\bar{y})}{\partial s_l} C_{ijml} e_{tsl} [D_{skm}(\bar{x}_0, \bar{y})] d\Gamma_y - \quad (13)$$

$$- \sum_{L_{\Delta}} \int u_k(\bar{y}) C_{ijml} e_{tsl} [D_{skm}(\bar{x}_0, \bar{y})] dx_t - \rho \omega^2 \oint_{\Gamma} u_k(\bar{y}) F_{ijk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y, \quad ,$$

де підсумовування контурних інтегралів розповсюджується на всі ГЕ. Варто зазначити, що згадані контурні інтеграли є регулярними і їх поява обтяжує чисельний алгоритм дуже незначною мірою.

В свою чергу, урахування симетрії задачі про коливання пружного простору, послабленого тріщиною нормального відриву, дозволяє надати рівнянню (13) більш простий вигляд:

$$\frac{\lambda + 2\mu}{2\pi} \left\{ \oint_{\Gamma} \left[\frac{\partial u_3(\bar{y})}{\partial x_1} r_{,1} + \frac{\partial u_3(\bar{y})}{\partial x_2} r_{,2} \right] \left[\frac{\nu}{1-\nu} T_1(r) - T_2(r) \right] d\Gamma_y - \right.$$

$$\left. - \sum_{L_{\Delta}} \int u_3(\bar{z}) \frac{\partial r}{\partial p} \left[\frac{\nu}{1-\nu} T_1(r) - T_2(r) \right] dL - \frac{\rho \omega^2}{\mu} \oint_{\Gamma} u_3(\bar{y}) U_0(r) d\Gamma_y \right\} = q, \quad (14)$$

де через \bar{p} позначений вектор одиничної нормалі до контуру плоского елемента L_{Δ} в точці \bar{z} .

Чисельна методика, побудована на основі граничного рівняння (14), була знову застосована для чисельного розв'язання задачі про коливання простору, послабленого дископодібною тріщиною нормального відриву, при тій самій густині ГЕ-сітки. Отримані результати засвідчили значне підвищення точності розрахунків (лінії на рис. 2, позначені прямокутниками). В більшості випадків відносна похибка становила 6-7% (табл. 1). Розподіл похибки в залежності від частоти коливань набув більш рівномірного характеру, причому в районі максимальних значень КІН величина похибки знову була досить малою.

Таблиця 1

Відносна похибка (%) чисельного обчислення нормованого динамічного КІН в залежності від частоти ω , коефіцієнту Пуассона ν та виду розв'язувального рівняння

$\nu \backslash \omega RC_1^{-1}$	0	0.25	0.5	0.75	0.85	1.0	ГІР	N_R
0.1	10.2	9.4	10.7	8.0	3.0	1.3	(8)	5
	7.1	6.8	6,6	2.8	3.0	1.7	(14)	5
	5.7	5.5	5.6	2.4	3.0	0.9	(14)	10
	2.3	2.0	2.1	0.2	1.6	1.7	(4)	10
0.25	8.2	9.4	10.8	3.4	0.1	14.5	(8)	5
	7.2	6.7	6.3	1.8	0.5	1.9	(14)	5
	5.7	5.4	5.3	1.7	0.9	0.4	(14)	10
	2.3	1.9	2.8	0.5	0.1	0.8	(4)	10
0.33	21.4	9.3	12.4	1.9	8.4	37.2	(8)	5
	7.2	7.0	4.4	1.1	1.3	8.2	(14)	5
	5.7	5.8	3.6	0.7	0.1	2.8	(14)	10
	2.3	2.3	0.	1.4	0.7	3.0	(4)	10

Цифри в останньому стовпчику таблиці характеризують густину ГЕ-сітки (кількість елементів вздовж радіусу кругової тріщини).

Зазначимо, що при подальшому згущенні сітки граничних елементів точність результатів, отриманих за допомогою рівняння (14), підвищується досить повільно (табл. 1). Водночас, застосування чисельної методики, побудованої на основі гіперсингулярного ГІР (4) [5], дозволяє при такій самій сітці отримати загалом кращі результати. Зокрема, як свідчать дані, наведені в таблиці 1, при невеликих значеннях параметра частоти ($\omega RC_1^{-1} \leq 0.5$) за будь-якого ν спостерігалась значно вища точність, тоді як при збільшенні частоти обчислення за формулою (4) інколи давали більшу похибку.

На рис. 3 представлено залежності від параметра частоти нормованого динамічного КІН, обчисленого за допомогою рівняння (14) (лінії, позначені прямокутниками) та рівняння (4) (лінії, позначені трикутниками) при трьох значеннях коефіцієнту Пуассона ν . Для чисельних розрахунків була використана досить густа ГЕ-сітка (10 елементів вздовж радіусу). Лінії, позначені ромбами, відповідають еталонним даним [9].

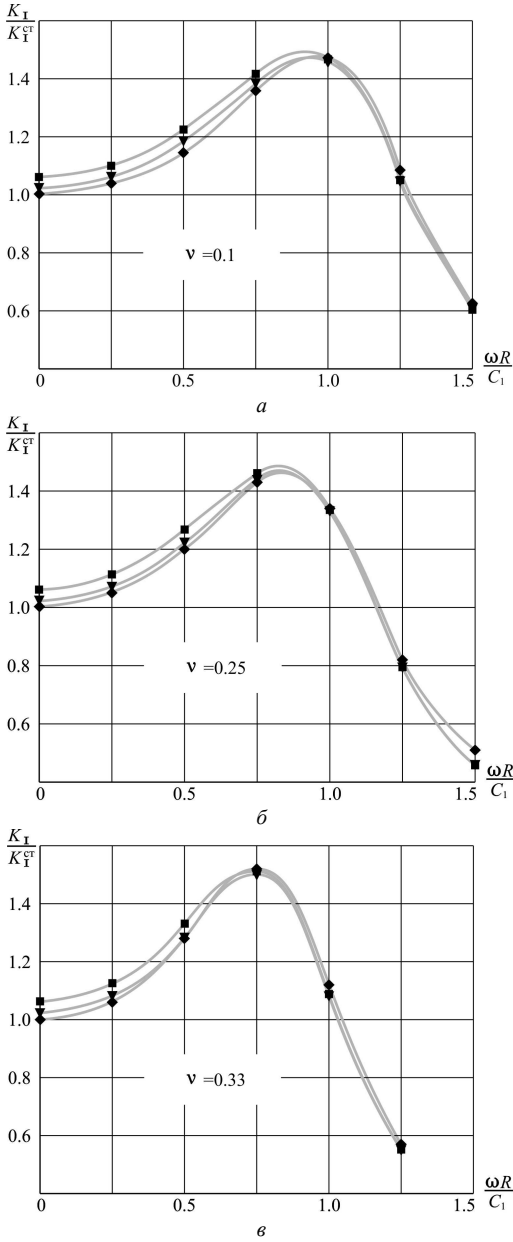


Рис. 3

Отже, дані, наведені в таблиці 1 та на рис. 3, свідчать про більш високу в цілому точність результатів, отриманих за чисельним алгоритмом, побудованим на основі гіперсингулярного ГІР (4). Та головним аргументом на користь цієї методики слід вважати значно нижчий об'єм обчислень. Справа в тому, що в усіх чисельних експериментах процес розв'язання задачі за допомогою системи (4) займав приблизно в 4,5 рази менше часу, ніж за допомогою граничних інтегро-диференціальних рівнянь (14). Таким чином, слід визнати, що з точки зору ефективності викладена в роботі [5] методика аналізу коливальних масивів, послаблених тріщинами, що спирається на регуляризацію після дискретизації, переважає викладену вище методику, яка використовує інтегро-диференціальну форму розрахункових співвідношень (регуляризацію до дискретизації).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Хуторянский Н.М. Граничные интегральные и интегро-дифференциальные уравнения второго рода для основной смешанной задачи теории упругости // Прикладные проблемы прочности и пластичности. – 1981. – С.3–13
2. Ворона Ю.В., Геращенко О.В. Методика розв'язання задачі про гармонічні коливання масивів з тріщинами // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2007. – Вип. 81.– С.119–134
3. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости. – М.: Ф-М, 1963. – 280 с.
4. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М: Наука, 1978. – 352 с.
5. Ворона Ю.В., Геращенко О.В. Методика чисельного дослідження коливальних елементів конструкцій з тріщинами // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2009. – Вип. 83.– С.84–92
6. Sladek V., Sladek J. Regularization of hypersingular integrals in BEM formulations using various kinds of continuous elements // Engineering Analysis with Boundary Elements, 17 (1996), pp. 5-18
7. Купрадзе В.Д. и др. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости / Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. – М.: Наука, 1976. – 664 с.
8. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. – 524 с.
9. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2-х томах. Т.2: Пер. с англ./Под ред. Ю.Мураками. – М: Мир, 1990. – 1016 с.

Отримано 07.06.10

Ворона Ю.В., Геращенко О.В., Русанова Е.С.

ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЕ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ПРО ДЕФОРМИРОВАНИЕ МАССИВОВ С ТРЕЩИНАМИ

Анализируются особенности исследования колебаний массивных элементов конструкций с трещинами по гранично-элементной методике, основанной на применении теоремы Стокса. Разработанная методика сравнивается с другим численным подходом, связанным с вычислением конечной части гиперсингулярного интеграла. Показано, что последний алгоритм является более эффективным.

Vorona Y.V., Gerashchenko O.V., Rusanova O.S.

BOUNDARY ELEMENTS APPROACHES TO THE 3-D FRACTURE ANALYSIS

The aspects of the Boundary Element procedures for the vibration analysis of elastic solids with cracks are considered. The procedure is based on the regularization with the help of Stoke's theorem and compared with another technique connected to direct evaluation of hypersingular integrals. The last approach is found to be more efficient.