

УДК 539.3

В.К. Чибіряков, д-р техн. наук
І.В. Жупаненко

ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ ТОВСТОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ

Пропонується аналітично-чисельна методика розрахунку частот та форм власних коливань віссиметричної товстої циліндричної оболонки сталюї товщини. Особливістю методики є те, що динамічна теорія оболонки побудована без обмеження відносної товщини. Ефективність запропонованого підходу перевірялась при розв'язку модельних задач та порівнянням з результатами, отриманими за іншими методиками.

Розглядається однорідне тіло, внутрішня та зовнішня поверхні якого є круговими циліндрами радіусом відповідно R_0 та R . Товщина $h = R - R_0$ співрозмірна з його довжиною L .

Для такого тіла реалізується запропонована в [1] аналітично-чисельна методика визначення частот і форм власних коливань. Методика передбачає два етапи розв'язання просторової задачі динамічної теорії пружності:

- 1) зниження вимірності вихідних рівнянь та граничних умов;
- 2) розв'язок редукованої крайової задачі чисельними методами.

Для визначення з єдиних позицій граничних умов всіх видів передбачається, що кожна точка торцевих поверхонь закріплена двома пружними в'язями відомої жорсткості k . Це дає можливість реалізувати всі основні граничні умови за рахунок варіювання жорсткістю в'язів. Граничні умови в такому випадку записуються наступним чином:

$$\begin{aligned} \frac{k_{j0}}{\sqrt{1+k_{j0}^2}} u_j(0) - \frac{1}{\sqrt{1+k_{j0}^2}} \sigma_{zj}(0) &= \frac{k_{j0}}{\sqrt{1+k_{j0}^2}} \cdot \Delta_{j0} + \frac{1}{\sqrt{1+k_{j0}^2}} \cdot q_{j0}, \\ \frac{k_{jL}}{\sqrt{1+k_{jL}^2}} u_j(L) + \frac{1}{\sqrt{1+k_{jL}^2}} \sigma_{zj}(L) &= \frac{k_{j0}}{\sqrt{1+k_{jL}^2}} \cdot \Delta_{jL} + \frac{1}{\sqrt{1+k_{jL}^2}} \cdot q_{jL}, \end{aligned} \quad (1)$$

($j = r, z$)

де k_{i0}, k_{iL} – жорсткість в'язів по відповідному напрямку на торцевій поверхні $z=0$ та $z=L$ відповідно.

Розглядаємо стаціонарні коливання системи у вигляді стоячих хвиль виду:

$$u_z^i(z, t) = u_{z,0}^i(z) \cdot \sin(\theta \cdot t), \quad \left(u_z^i \Leftrightarrow u_r^i \Leftrightarrow \sigma_z^i \Leftrightarrow \sigma_{zr}^i \right),$$

Вихідні співвідношення лінійної динамічної теорії пружності в вісесиметричній постановці записуються відносно компонент вектора переміщень та напружень в циліндричній системі координат (1) – (2) [1].

Двовимірна задача зводиться до системи одновимірних за просторовими координатами динамічних рівнянь теорії оболонок редукцією вихідних співвідношень та граничних умов по радіальній просторовій координаті за допомогою *узагальненого методу скінчених інтегральних перетворень* [2]. Після редукції вихідних рівнянь (1) – (2) [1] і виключення характеристик, що входять в редуковані рівняння алгебраїчно, отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_z^j}{dz} &= \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot \left(b^{jj} + \frac{2}{h} \cdot m^{ij} \right) \cdot u_r^j + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \cdot \sigma_{zz}^j \\ \frac{du_r^j}{dz} &= -\frac{2}{h} \cdot m^{ij} \cdot u_z^j + \sigma_{zr}^j \\ \frac{d\sigma_{zz}^j}{dz} &= \frac{\rho}{\mu} \cdot \theta^2 \cdot u_z^j + \left(-b^{ij} + \frac{2}{h} \cdot m^{ji} \right) \cdot \sigma_{zr}^j \\ \frac{d\sigma_{zr}^j}{dz} &= \left(2 \cdot b^{i\alpha} \cdot b^{j\alpha} - \frac{4}{h} \cdot b^{i\alpha} \cdot m^{j\alpha} + \frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{2}{h} \cdot m^{i\alpha} \cdot b^{j\alpha} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{4}{h^2} \cdot m^{i\alpha} \cdot m^{j\alpha} - \frac{\rho}{\mu} \cdot \theta^2 \cdot \delta^{ij} \right) \cdot u_r^j + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{2}{h(s)} \cdot m^{ji} \cdot \sigma_{zz}^j \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Матричні коефіцієнти, що входять в редуковані рівняння (2), описані в [2]. Редуковані граничні умови отримуємо простою заміною функцій, що входять в умови (1), їхніми моментами.

Остаточню редуковану крайову задачу записуємо в матричній формі у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з граничними умовами для розрахункових вектор-функцій редукованих рівнянь:

$$\frac{d}{dr} \vec{Y} = [A] \cdot \vec{Y} + \vec{F}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
 [C_0] \cdot \vec{Y}(0) = \vec{0}, \quad [C_L] \cdot \vec{Y}(L) = \vec{0}. \quad (4)
 \end{aligned}$$

$$\text{Тут } \vec{Y} = \begin{bmatrix} u_z^* = \mu \cdot u_z^i \\ u_r^* = \mu \cdot u_r^i \\ \sigma_{zz}^i \\ \tau_{rz}^i \end{bmatrix}; \quad \vec{F} = \vec{0};$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \left(b^{ij} + \frac{2}{h} \cdot m^{ij} \right) & \frac{\mu}{\lambda+2\mu} \cdot \delta^{ij} & 0 \\ -\frac{2}{h} \cdot m^{ij} & 0 & 0 & \delta^{ij} \\ \frac{\rho}{\mu} \cdot \theta^2 \cdot \delta^{ij} & 0 & 0 & -b^{ij} + \frac{2}{h} \cdot m^{ij} \\ 0 & 2 \cdot b^{i\alpha} b^{j\alpha} - \frac{4}{h} \cdot b^{ij} \cdot m^{i\alpha} + \frac{2\lambda}{\lambda+2\mu} \cdot \frac{2}{h} \cdot m^{i\alpha} \cdot b^{j\alpha} + \\ + \frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} \cdot \frac{4}{h^2} \cdot m^{i\alpha} m^{j\alpha} - \frac{\rho}{\mu} \cdot \theta^2 \cdot \delta^{ij} & \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \cdot \frac{2}{h(s)} \cdot m^{ij} & 0 \end{bmatrix};$$

$$[C_0] = \begin{bmatrix} \frac{k_{z0}}{\sqrt{1+k_{z0}^2}} \cdot \delta^{ij} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{1+k_{z0}^2}} \cdot \delta^{ij} & 0 \\ 0 & \frac{k_{r0}}{\sqrt{1+k_{r0}^2}} \cdot \delta^{ij} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{1+k_{r0}^2}} \cdot \delta^{ij} \end{bmatrix};$$

$$[C_L] = \begin{bmatrix} \frac{k_{zL}}{\sqrt{1+k_{zL}^2}} \cdot \delta^{ij} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1+k_{zL}^2}} \cdot \delta^{ij} & 0 \\ 0 & \frac{k_{rL}}{\sqrt{1+k_{rL}^2}} \cdot \delta^{ij} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1+k_{rL}^2}} \cdot \delta^{ij} \end{bmatrix}.$$

Складний характер редукованих рівнянь виключає можливість знаходження їх розв'язку аналітичними методами. Тому звичайну послідовність застосування методу інтегральних перетворень до рівнянь в часткових похідних – перехід до зображень, розв'язання редукованих рівнянь аналітично та перехід до оригіналів – необхідно змінити,

використовуючи на другому етапі чисельні методи. Зокрема, для розв'язання системи (3) при фіксованому значенні частоти збуджуючого навантаження θ обрано ефективний метод дискретної ортогоналізації С.К.Годунова [3]. Розв'язання задач Коші, до яких зводяться одновимірні крайові задачі, ведеться методом Рунге–Кутта–Фельберга з контролем точності на кроці [4].

Частоти власних коливань та відповідні їм форми визначаються пошаговим методом за алгоритмом, запропонованим для кільцевої пластини [1]. Розглядається послідовність значень θ з певним кроком, для якої виконується лише прямий хід алгоритму дискретної ортогоналізації. Після визначення частоти власних коливань виконується обернений хід для побудови відповідної форми коливань.

Наведена методика реалізована у вигляді програми на алгоритмічній мові FORTRAN. Основою алгоритмізації першого етапу розрахунку (зниження вимірності вихідних рівнянь динамічної теорії пружності) є можливість отримання коефіцієнтів редукованих рівнянь в явному вигляді. Формалізм прийнятого варіанту зниження вимірності дозволяє виділити в коефіцієнтах редукованих рівнянь скалярні множники та сталі матричні складові, на обробку яких в чисельних алгоритмах витрачається найбільше часу. Таке розділення коефіцієнтів не лише істотно скорочує об'єм інформації, що зберігається в пам'яті ЕОМ, але й сприяє оптимізації обчислювальних алгоритмів за рахунок програмування підготовчої роботи по обчисленню матриці коефіцієнтів для чисельного алгоритму, що реалізує другий етап розрахунку.

В якості ілюстрації можливостей розробленої методики досліджено вільні коливання защемленої та шарнірно опертої по обох торцевих поверхнях циліндричної оболонки довжиною $L=1,0$ м, зовнішнім радіусом $R=0,5$ м. Фізичні характеристики оболонки наступні: $\rho = 2,4 \text{ т/м}^3$, $\nu = 0,3$, $E = 2,4 \cdot 10^6 \text{ т/м}^2$.

Частоти власних коливань шарнірно опертої оболонки при різних співвідношеннях товщини до радіусу підраховані з використанням рівнянь (3) – (4) при $N=2, 4$ та 6 і за методикою В.С. Гонткевича [5]. Порівняння частот наведено в табл. 1.

Власні коливання жорстко защемленої оболонки також досліджувались при різних співвідношеннях товщини до радіусу з використанням рівнянь (3) – (4) при $N=2, 4$ та 6 і з використанням рівнянь класичної теорії оболонок [6]. Порівняння частот наведено в табл. 2.

Відповідні форми коливань шарнірно опертої та защемленої оболонок при товщині $h=0,1$ м наведено на рис. 1.

Таблиця 1

Частоти власних коливань шарнірно опертої оболонки

Частоти коливань	Пораховані за				Розбіжність, % (для N=2)
	формулою В.С.Гонткевича [5]	запропонованою методикою при			
		N=2	N=4	N=6	
<i>h=0,05 м</i>					
ω_1	2110	2043	–	–	3,1
ω_2	2188	2174	–	–	0,6
ω_3	2497	2507	–	–	0,4
<i>h=0,1 м</i>					
ω_1	2242	2151	2151	–	4,0
ω_2	2522	2471	2430	–	2,0
ω_3	3487	3321	3164	–	4,8
<i>h=0,125 м</i>					
ω_1	2316	2209	2209	2209	4,6
ω_2	2730	2625	2580	2580	3,8
ω_3	4064	3693	3503	3503	9,1

Таблиця 2

Частоти власних коливань жорстко защемленої оболонки

Частоти коливань	Пораховані за				Розбіжність, % (для N=2)
	класичною теорією оболонок [6]	запропонованою методикою при			
		N=2	N=4	N=6	
<i>h=0,05 м</i>					
ω_1	2196	2197	–	–	–
ω_2	2254	2259	–	–	–
ω_3	2793	2800	–	–	–
<i>h =0,1 м</i>					
ω_1	2389	2385	2372	–	0,2
ω_2	2781	2693	2622	–	3,2
ω_3	4272	3823	3621	–	10,5
<i>h =0,125 м</i>					
ω_1	2504	2489	2472	2472	0,6
ω_2	3021	2868	2792	2790	5,1
ω_3	5091	4208	3987	3981	17,3

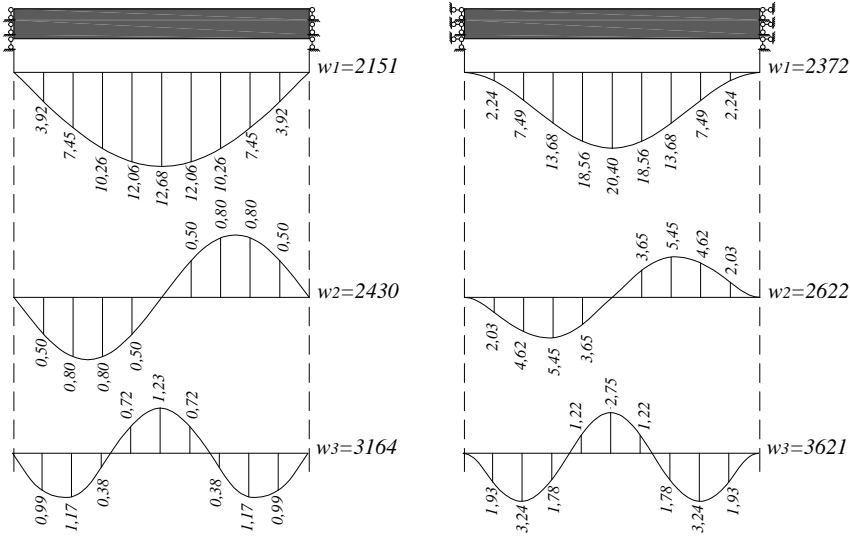


Рис. 1. Форми власних коливань оболонок

Варто відзначити, що запропонована методика дозволяє визначати частоти та форми власних коливань циліндричної оболонки для широкого діапазону значень відносної товщини $\varepsilon = h/R$. Методика орієнтована на клас товстих оболонок, але числові результати, наведені в табл. 1 – 2 показують, що при відносній товщині оболонки $\varepsilon = 0,1$ ($h=0,05$ м, $R=0,5$ м) частоти власних коливань практично співпадають з частотами, порахованими за класичною теорією оболонок. При значенні відносної товщини $\varepsilon = (1/5, 1/4)$ отримані за цією методикою частоти власних коливань істотно менші, причому чим вища частота, тим більша відносна різниця.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Жупаненко І.В. Власні коливання товстої кільцевої пластини. // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. – Вып. 83. – К.: КНУБА. – 2009. – С. 165-172.
2. Чибряков В.К., Смоляр А.М. Теорія товстих пластин та оболонок: монографія. – Черкаси: ЧДТУ, 2002. – 160 с.
3. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. – В кн.: Успехи математических наук, 1961, т. XVI, вып. 3. – С. 171–174.

4. *Форсайд Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. – М.: Изд. «Мир», 1980. – 280 с.
5. *Гонткевич В.С.* Собственные колебания пластинок и оболочек. Справочник./ Под ред. Филиппова А.П./ Киев: Наукова думка, 1964 – 288 с.
6. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластины и оболочки.: Пер. с англ. – М.: Наука, 1956. – 635 с.

Отримано 12.08.09.

В.К. Чибиряков, И.В. Жупаненко

Собственные колебания толстой цилиндрической оболочки

Предложена численно-аналитическая методика решения задачи о собственных колебаниях толстых осесимметричных цилиндрических оболочек. Аналитическая часть методики состоит в применении обобщенного метода конечных интегральных преобразований по толщине оболочки для снижения размерности исходных уравнений трехмерной задачи динамической теории упругости без введения геометрических гипотез. Редуцированные одномерные задачи численно решаются методом дискретной ортогонализации С.К.Годунова. Эффективность предложенной методики проверялась при решении модельных задач и сравнением с полученными по другим методикам результатами.

V.K. Chybiryakov, I.V. Zhupanenko

Free vibrations of thick axi-symmetric cylindrical shells

A numerical-analytical method is proposed for solution of the problem on free vibrations of thick axi-symmetric cylindrical shells. The analytical part of the method consists of application of the method of finite integral transforms on shell's thicknesses for reduction of three-dimensional equations of the dynamic theory of elasticity without geometrical hypothesize. The reduced one-dimensional problem are solved numerically by a Godoonov's method of discrete ortogonalization. Efficiency of this approach has been checked by solving some model problems and comparing with results obtained using other approaches.