

УДК 514.18

О. А. Пилипака,
аспірант, Національний університет
біоресурсів і природокористування України
Т. С. Пилипака,
к.т.н., Національний університет
біоресурсів і природокористування України

СЕРЕДНЯ КРИВИНА ГВИНТОВИХ ПОВЕРХОНЬ, ВІДНЕСЕНИХ ДО КООРДИНАТНИХ ЛІНІЙ КРИВИНИ

Анотація: розглянуто конструювання гвинтової поверхні рухом плоскої кривої незмінної форми у нормальній площині гвинтової лінії таким чином, щоб утворена поверхня була віднесена до сімей ліній кривини. Виведення векторного рівняння поверхні здійснено із застосуванням супровідного тригранника гвинтової лінії. Наведено параметричні рівняння деяких поверхонь та отримано їх зображення.

Ключові слова: гвинтова поверхня, лінії кривини, супровідний тригранник, формули Френе, скрут, кривина.

Вступ. Гвинтові поверхні і їх частковий випадок – поверхні обертання – є найбільш поширеними в практиці конструювання технічних форм. Вони мають таку властивість, яка їх відрізняє від інших поверхонь, а саме вони можуть ковзати вздовж самих себе без деформації самої поверхні. Ця властивість у поверхонь обертання використовується для створення підшипників кочення, а у гвинтових – для утворення різьб і інших гвинтових пристроїв. Поверхні із сталою середньою кривиною використовуються для конструювання балонів для зберігання стисненого газу.

До методів утворення і задання поверхонь висуваються вимоги, виконання яких пов'язане з геометричними дослідженнями. Поверхня повинна бути аналітично описана за допомогою рівнянь для створення комп'ютерних моделей її візуалізації і подальшого виготовлення. Найкращим аналітичним описом поверхонь вважається такий, при якому поверхня віднесена до ортогональної сітки із координатних ліній кривини. Ці лінії є оптимальними траєкторіями руху різального інструменту при виготовленні поверхонь. Крім того, при такому описі значно спрощується перша і друга квадратичні форми поверхні, на основі яких проводяться різні розрахунки, в тому числі і на міцність. Цим обґрунтовується актуальність проведення даних досліджень.

Аналіз літературних даних і постановка проблеми. Гвинтові поверхні відомі із найдавніших часів. Слід згадати про винайдений ще Архімедом гідравлічний гвинт. Реконструйовані і вдосконалені гвинти Архімеда і нині рухають морські кораблі, гвинтові літаки та вертольоти, гідротурбіни тощо. Винахід нескінченного гвинта привів Архімеда до винаходу болта, сконструйованого із гвинта й гайки. Навіть цвяхи виготовляють гвинтовими для більшої надійності кріплення [1]. Найрізноманітніший різальний інструмент має гвинтову поверхню [2]. Для стискання повітря поруч із поршневыми застосовують гвинтові компресори [3]. Для розв'язування різних геометричних задач, пов'язаних із гвинтовими поверхнями, застосовується гвинтове проєкціювання [4]. Велику кількість праць присвячено профілюванню інструменту для обробки гвинтових поверхонь [5, 6]. Окрему групу праць складають дослідження з конструювання поверхонь, віднесених до ліній кривини [7].

Метою проведених досліджень була розробка способу віднесення гвинтових поверхонь до координатної сітки із ліній кривини.

Для досягнення поставленої мети необхідно було вирішити наступні основні задачі:

1. Розробити аналітичний опис переміщення плоскої твірної кривої незмінної форми у нормальній площині напрямної гвинтової лінії таким чином, щоб утворену поверхню можна було віднести до ліній кривини.

2. Навести приклади параметричних рівнянь утворених поверхонь та здійснити їх візуалізацію.

Результати досліджень. Якщо плоску криву жорстко закріпити в нормальній площині супровідного тригранника Френе і сам тригранник рухати по гвинтовій лінії, то плоска крива опише гвинтову поверхню, для якої вона буде твірною. Однією сім'єю координатних ліній такої поверхні буде множина положень плоскої твірної, а другою – гвинтові лінії – траєкторії руху точок плоскої кривої. Отримана таким чином гвинтова поверхня не буде віднесена до ліній кривини. Щоб поверхня була віднесена до ліній кривини, необхідно, щоб плоска твірна під час руху тригранника поверталась в нормальній площині на кут ε навколо орта дотичної, величина якого залежить від довжини дуги s напрямної кривої (гвинтової лінії) і її скруту σ в поточній точці знаходження тригранника. Зважаючи на те, що скрут σ гвинтової лінії є величиною сталою, кут можна знайти інтегруванням виразу [8]:

$$\varepsilon = -\int \sigma ds = -\sigma s + \varepsilon_0. \quad (1)$$

Опишемо поверхню, утворену вказаним способом, у векторній формі із застосуванням формул Френе. На рис 1 в точках A і B напрямної кривої (у нашому випадку гвинтової лінії) побудовані супровідні тригранники Френе.

В нормальній площині тригранника, утвореній ортами головної нормалі \bar{n} і бінормалі \bar{b} , розташована плоска крива – твірна поверхні. При русі тригранника з точки A в точку B твірна крива повинна одночасно повертатися навколо орта дотичної $\bar{\tau}$ на кут $\varepsilon = -\sigma s$ згідно (1) (постійну інтегрування ε_0 – початкове

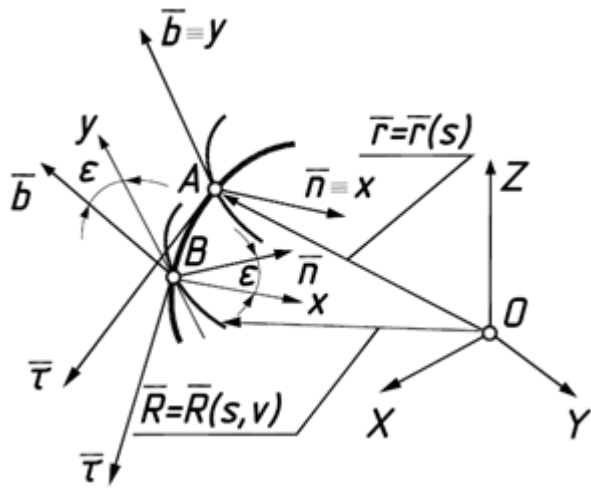


Рис. 1. Схема утворення поверхні для її описання с допомогою формул Френе

значення кута ε – приймаємо рівним нулю). Різниця кутів ε в точках A і B гвинтової лінії таким чином складе σs_{AB} , де s_{AB} – довжина дуги гвинтової лінії між точками A і B . Щоб реалізувати такий поворот, розташуємо в початковій точці A ще одну плоску систему координат так, щоб вісь x збігалася з ортом \bar{n} , а вісь y – з ортом \bar{b} (рис. 1). В цій системі задамо плоску криву параметричними рівняннями $x=x(v)$, $y=y(v)$, де v – незалежна змінна. Поставимо умову, щоб під час руху тригранника ця система разом з кривою поверталася навколо орта дотичної $\bar{\tau}$ на кут $\varepsilon = -\sigma s$. Тоді векторне рівняння поверхні запишеться:

$$\bar{R}(s, v) = \bar{r} + \bar{n}(x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon) + \bar{b}(x \sin \varepsilon + y \cos \varepsilon), \quad (2)$$

де $\bar{r} = \bar{r}(s)$ – радіус-вектор напрямної кривої (в нашому випадку гвинтової лінії).

Знайдемо коефіцієнти першої і другої квадратичних форм поверхні (2). Для цього потрібно мати частинні перші, другі і змішану похідні поверхні (2). Перша і друга частинні похідні по змінній v запишуться:

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial v} = \bar{n} \left(\frac{dx}{dv} \cos \varepsilon - \frac{dy}{dv} \sin \varepsilon \right) + \bar{b} \left(\frac{dx}{dv} \sin \varepsilon + \frac{dy}{dv} \cos \varepsilon \right). \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{R}}{\partial v^2} = \bar{n} \left(\frac{d^2 x}{dv^2} \cos \varepsilon - \frac{d^2 y}{dv^2} \sin \varepsilon \right) + \bar{b} \left(\frac{d^2 x}{dv^2} \sin \varepsilon + \frac{d^2 y}{dv^2} \cos \varepsilon \right). \quad (4)$$

Перша частинна похідна по змінній s запишеться:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{R}}{\partial s} = & \bar{r}' + \bar{n}'(x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon) + \bar{n} \left(-\frac{d\varepsilon}{ds} x \sin \varepsilon - \frac{d\varepsilon}{ds} y \cos \varepsilon \right) + \\ & + \bar{b}'(x \sin \varepsilon + y \cos \varepsilon) + \bar{b} \left(\frac{d\varepsilon}{ds} x \cos \varepsilon - \frac{d\varepsilon}{ds} y \sin \varepsilon \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Для подальшого перетворення частинної похідної (5) застосуємо формули Френе:

$$\bar{r}' = \bar{\tau}; \quad \bar{\tau}' = k\bar{n}; \quad \bar{n}' = \sigma\bar{b} - k\bar{\tau}; \quad \bar{b}' = -\sigma\bar{n}. \quad (6)$$

Підставимо (6) в (5) і після групування отримаємо частинну похідну (5) в проекціях на орти тригранника Френе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{R}}{\partial s} = & \bar{\tau}[1 - k(x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon)] - \\ & - \bar{n}[\varepsilon'(x \sin \varepsilon + y \cos \varepsilon) + \sigma(x \sin \varepsilon + y \cos \varepsilon)] + \\ & + \bar{b}[\varepsilon'(x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon) + \sigma(x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon)]. \end{aligned} \quad (7)$$

Нарешті, підставимо у (7) вираз похідної ε' , який згідно (1) дорівнює $\varepsilon' = -\sigma$ і отримаємо:

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial s} = \bar{\tau}[1 - k(x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon)] \quad (8)$$

Таким же чином (з використанням формул Френе) знаходимо другу похідну диференціюванням виразу (8) по змінній s , приймаючи до уваги, що для гвинтової лінії $k = const$:

$$\frac{\partial^2 \bar{R}}{\partial s^2} = -\bar{\tau}k\sigma(x \sin \varepsilon + y \cos \varepsilon) + \bar{n}k[1 - k(x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon)]. \quad (9)$$

Диференціюючи (8) по змінній v , знаходимо мішану похідну:

$$\frac{\partial^2 \bar{R}}{\partial s \partial v} = -\bar{\tau}k \left(\frac{dx}{dv} \cos \varepsilon - \frac{dy}{dv} \sin \varepsilon \right) \quad (10)$$

Знаходимо коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні (2):

$$G = \left(\frac{\partial \bar{R}}{\partial s} \right)^2 = [1 - k(x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon)]^2;$$

$$F = \frac{\partial \bar{R}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \bar{R}}{\partial v} = 0; \quad E = \left(\frac{\partial \bar{R}}{\partial v} \right)^2 = \left(\frac{dx}{dv} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dv} \right)^2. \quad (11)$$

Знаходимо коефіцієнти другої квадратичної форми поверхні (2):

$$L = \frac{1}{\sqrt{GE - F^2}} \cdot \frac{\partial^2 \bar{R}}{\partial v^2} \left[\frac{\partial \bar{R}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \bar{R}}{\partial v} \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{GE - F^2}} \begin{vmatrix} 0 & x'' \cos \varepsilon - y'' \sin \varepsilon & x'' \sin \varepsilon + y'' \cos \varepsilon \\ 1 - k(x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon) & 0 & 0 \\ 0 & x' \cos \varepsilon - y' \sin \varepsilon & x' \sin \varepsilon + y' \cos \varepsilon \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(x'y'' - x''y')}{\sqrt{x'^2 + y'^2}};$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{GE - F^2}} \cdot \frac{\partial^2 \bar{R}}{\partial s \partial v} \left[\frac{\partial \bar{R}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \bar{R}}{\partial v} \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{GE - F^2}} \begin{vmatrix} -k(x' \cos \varepsilon - y' \sin \varepsilon) & 0 & 0 \\ 1 - k(x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon) & 0 & 0 \\ 0 & x' \cos \varepsilon - y' \sin \varepsilon & x' \sin \varepsilon + y' \cos \varepsilon \end{vmatrix} = 0; \quad (12)$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{GE - F^2}} \cdot \frac{\partial^2 \bar{R}}{\partial s^2} \left[\frac{\partial \bar{R}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \bar{R}}{\partial v} \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{GE - F^2}} \begin{vmatrix} -k\sigma(x \sin \varepsilon + y \cos \varepsilon) & k[1 - k(x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon)] & 0 \\ 1 - k(x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon) & 0 & 0 \\ 0 & x' \cos \varepsilon - y' \sin \varepsilon & x' \sin \varepsilon + y' \cos \varepsilon \end{vmatrix} =$$

$$= - \frac{k[1 - k(x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon)](x' \sin \varepsilon + y' \cos \varepsilon)}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

Рівність нулю середніх коефіцієнтів першої і другої квадратичних форм свідчить про те, що поверхня віднесена до сімей координатних ліній, якими є лінії кривини.

Знайдемо вираз середньої кривини поверхні, яка визначається через коефіцієнти першої і другої квадратичних форм поверхні за формулою:

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}. \quad (13)$$

Підстановка коефіцієнтів (11), (12) в (13) дає вираз середньої кривини гвинтової поверхні із довільною твірною $x=x(v)$, $y=y(v)$:

$$H = \frac{[1 - k(x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon)](x'y'' - x''y') - k(x' \sin \varepsilon + y' \cos \varepsilon)(x'^2 + y'^2)}{2[1 - k(x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon)](x'^2 + y'^2)^{3/2}} \quad (14)$$

Розглянемо приклад. Нехай твірною гвинтової поверхні буде коло радіуса r , яке описується параметричними рівняннями:

$$x = r \cos v; \quad y = r \sin v. \quad (15)$$

В цьому випадку утвореною поверхнею буде гвинтова трубчаста поверхня. Знайдемо її середню кривину. Для цього запишемо перші і другі похідні рівнянь (15):

$$\begin{aligned} x' &= -r \sin v; & y' &= r \cos v; \\ x'' &= -r \cos v; & y'' &= -r \sin v. \end{aligned} \quad (16)$$

Підставимо (16) в (14) і після спрощень отримаємо:

$$H = \frac{1 - 2kr \cos(v + \varepsilon)}{2r[1 - kr \cos(v + \varepsilon)]} = \frac{1 - 2kr \cos(v - \sigma)}{2r[1 - kr \cos(v - \sigma)]}. \quad (17)$$

Якщо $k=0$ (тобто вісь поверхні стає прямолінійною), то трубчаста поверхня перетворюється в циліндр і його середня кривина стає рівною $1/2r$. Середня кривина поверхні є змінною, однак зважаючи на те, що косинус кута змінюється в межах від -1 до 1 , можна зробити висновок, що вона також змінюється, не виходячи за певні межі.

Висновки. На основі напрямної гвинтової лінії можна конструювати різноманітні поверхні, віднесені до координатних ліній кривини. Для цього в нормальній площині супровідного тригранника гвинтової лінії потрібно розташувати плоску твірну лінію. При русі тригранника по гвинтовій лінії твірна лінія повинна одночасно обертатися в нормальній площині навколо вершини тригранника на кут, рівний добутку скруту гвинтової лінії на довжину її дуги в поточній точці, взятому із знаком «мінус». Форма поверхні залежить від параметрів гвинтової лінії і виду твірної. Якщо твірною лінією є коло з центром у вершині тригранника, то утвореною поверхнею буде трубчаста гвинтова

поверхня. Її середня кривина змінюється, не виходячи за певні межі, зумовлені кривиною гвинтової лінії (осі поверхні) і величиною радіуса твірного кола.

Література

1. Степанов Б.А. Прочность винтовых гвоздей на выдергивание. – Сб. докладов науч. – техн. конференции профессорско–преподавательского состава Института Строительства и Архитектуры / Б.А. Степанов, Л.В. Деев. – М.: МГСУ, 2006. – С. 246 – 250.
2. Люкшин В.С. Теория винтовых поверхностей в проектировании режущих инструментов / В.С. Люкшин. – М.: Машиностроение, 1978. – 368 с.
3. Сақун В. А. Винтовые компрессоры / В.А. Сақун. – Л.: Машиностроение, 1970. – 400 с.
4. Иванов Ю. Н. Применение винтового проектирования к профилированию сопряженных поверхностей / Ю.Н. Тевлин. – Омск: ЮМПИ, 1963. – 115 с.
5. Щуров И. А. Расчет профиля дискового инструмента для обработки винтовой поверхности / И.А. Щуров // СТИН. – 1996. – №1. – С. 19 – 21.
6. Тевлин А. М. Профилирование дисковой фрезы для обработки конической винтовой поверхности / А.М. Тевлин, Л.И. Слав // Станки и инструмент. – 1971. – № 6. – С. 30 – 32.
7. Скидан І. А. Проблема віднесення поверхні до сітки з ліній кривини / І.А. Скидан, Н.Ю. Улицька // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. – Мелітополь: ТДАТА, 2003. – Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Т. 19. – С. 7 – 14.
8. Муквич М.М. Конструювання трубчастих поверхонь із просторовою віссю, описаних сім'ями координатних ліній кривини / М.М. Муквич // Прикл. геометрія та інж. графіка. – К.: КНУБА, 2009. – Вип.81. – С.195 – 200.

Аннотация

Рассмотрено конструирование винтовой поверхности движением плоской кривой постоянной формы в нормальной плоскости винтовой линии таким образом, чтобы образованная поверхность была отнесена к семейству линий кривизны. Выведение векторного уравнения поверхности осуществлено с использованием сопровождающего трехгранника винтовой линии. Наведены параметрические уравнения некоторых поверхностей и получены их изображения.

Ключевые слова: винтовая поверхность, линии кривизны, сопровождающий трехгранник, формулы Френе, кручение, кривизна.

Summary

Constructing of helicoid by the motion of the flat curve of permanent form in the normal plane of spiral line is considered in the article. Constructing surface was attributed to the family of lines of curvature. The leading out of vector equation of surface is carried out by the accompanying trihedron of spiral line. Self-reactance equations of some surfaces are pointed and it's images are got. Keywords: helicoid, lines of curvature, accompanying trihedron, formulas of Frene, twisting, curvature.