УДК 539.3

Ю.В. Ворона[1], канд.техн.наук
О.О. Лук'янченко[1], канд.техн.наук
О.В. Костіна[1], канд.техн.наук

[1]*Київський національний університет будівництва і архітектури*
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ, Україна. 03680

СТОХАСТИЧНІ ПАРАМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ ПРУЖНИХ СИСТЕМ З УРАХУВАННЯМ ЇХ ПОПЕРЕДНІХ СТАНІВ

Побудова редукованих моделей стохастичних параметричних коливань пружних систем з урахуванням їх попередніх станів виконана на основі методів скінченних елементів, узагальнених координат, асимптотичного методу і функціонального підходу. Задача стохастичної стійкості сформульована в середньому відносно моментних функцій фазових координат першого порядку. Задача розв'язана за допомогою 7-стадійного безперервного методу Рунге-Кутта 5-го порядку і вкладених формул Дормана-Прінса. В якості прикладу досліджена стохастична стійкість параметричних коливань пружної системи з одним ступенем вільності з урахуванням її попередніх станів.

Ключові слова: параметричні коливання, стохастична стійкість, моментні функції, редукована модель.

Сучасний розвиток техніки та технологій все частіше потребує досліджень параметричних коливань складних пружних систем при стохастичному впливі [1, 2, 3]. Якщо враховувати стан пружної системи не тільки в даний момент часу, а і в минулому, дослідження її динамічної поведінки буде більш детальним. Динамічна поведінка систем, які описуються звичайними інтегро-диференціальними рівняннями із запізненням аргументу, представлені в роботі [4]. Ця задача є складною, тому для її вирішення найчастіше застосовуються чисельні методи. В роботі розроблено методику формування редукованих математичних моделей, які описують стохастичні параметричні коливання пружних систем з урахуванням їх попередніх станів на основі методів скінченних елементів, узагальнених координат та асимптотичного методу, що заснований на розкладанні статистичних характеристик розв'язків динамічної задачі за малим параметром. Питання про стохастичну стійкість параметричних коливань пружних систем сформульовано у середньому на основі моментних функцій фазових координат першого порядку, які отримані за допомогою функціонального підходу та формули Фурутцу-Новікова для розщеплення функціоналів. Створена методика дослідження динамічної поведінки та стохастичної стійкості складних пружних систем на основі 7-стадійного неперервного методу чисельного інтегрування Рунге-Кутта п'ятого порядку із врахування вкладених формул Дормана-Принса, які реалізовані у вигляді обчислювальних процедур. Виконано тестування розробленої чисельної методики на прикладі параметричних коливань пружної системи з одним ступенем вільності при стохастичному експоненціально-корельованому впливі з урахуванням попередніх станів системи.

1. Побудова редукованих моделей стохастичних параметричних коливань пружних систем. Дискретна скінченноелементна модель стохастичних параметричних коливань пружних систем подається у вигляді системи лінеаризованих звичайних диференціальних рівнянь

$$M\ddot{\vec{u}}(t)+C\dot{\vec{u}}(t)+K\vec{u}(t)+z(t)K_G\vec{u}(t)=0\,, \tag{1}$$

де M, C, K, K_G – матриці розмірності $n\times n$, $\vec{u}(t)$ – n-вимірний вектор вузлових переміщень.

Для редукування моделі (1) вектор $\vec{u}(t)$ шукається у вигляді $\vec{u}(t)=U\vec{y}(t)$, де $U=(\vec{U}_1,\vec{U}_2,...,\vec{U}_m)$ – деяка підмножина базисних векторів; $y_i(t), \dot{y}_i(t)$ – узагальнені координати та узагальнені швидкості вузлів скінченно-елементної моделі конструкції. Система (1) зводиться до виду

$$M^*\ddot{\bar{y}}(t)+C^*\dot{\bar{y}}(t)+K^*\bar{y}(t)+z(t)K_G^*\bar{y}(t)=0\,. \tag{2}$$

Тут M^*, C^*, K^* та K_G^* – редуковані матриці мас, демпфірування, жорсткості та геометричної жорсткості відповідно; $z(t)$ − стохастичне параметричне навантаження.

В якості базисних векторів прийняті вектори форм власних коливань пружної системи $U=(\vec{\varphi}_1,\vec{\varphi}_2,...,\vec{\varphi}_m)$, де m – кількість утриманих форм, які нормовані по матриці мас. Редуковані матриці мас M^*, демпфірування C^* і жорсткості K^* мають вигляд

$$M^*=U^TMU=E=diag\left(1,1,...,1\right),$$
$$C^*=U^TCU=diag\left(2\varepsilon_1\omega_1,\,2\varepsilon_2\omega_2,...,2\varepsilon_m\omega_m\right),$$
$$K^*=U^TKU=diag\left(\omega_1^2,\,\omega_2^2,...,\omega_m^2\right), \tag{3}$$

де ω_i – частоти власних коливань, ε_i – коефіцієнт конструкційного демпфірування системи. Кількість векторів m може бути значно меншою за розмірність n вектора переміщень в рівнянні (1).

Задача побудови редукованої моделі динамічної стійкості параметричних коливань складних пружних систем з реальними геометричними параметрами є складною і розрахована на застосування обчислювальних засобів з великими ресурсами та швидкодійними процесорами. Для побудови редукованих матриць мас, демпфірування та жорсткості системи в роботі застосовується чисельна методика [5, 6], яка базується на процедурах обчислювального комплексу скінченно-елементного аналізу NASTRAN [7]. Редукована матриця жорсткості подається у вигляді $K^* = U^T KU$. Для цього вузлам скінченно-елементної моделі системи надається початкове переміщення у вигляді форм її власних коливань U і розв'язується обернена задача статики. Отримана реакція системи $R = KU$ на початкове переміщення множиться зліва на транспоновану матрицю форм власних коливань U^T. Редукована матриця геометричної жорсткості системи K_G^* подається у вигляді $K_G^* = U^T K\Phi\Lambda^{-1}\Phi^T KU$. Тут вектори KU та $K\Phi$ отримані за допомогою процедури визначення реакції системи на задане поле переміщень, яке подається відповідно у вигляді форм власних коливань U та форм втрати стійкості Φ. Форми втрати стійкості $\Phi=(\vec{\varphi}_1,\vec{\varphi}_2,...,\vec{\varphi}_m)$ та матриця критичних значень статичної складової навантаження $\Lambda=diag\left(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m\right)$ визначаються при розв'язанні задачі стійкості системи методом Ланцоша.

Якщо ввести $2m$-вимірний вектор фазових змінних

$$\overline{x}(t)=\left(x_1(t),x_2(t),...,x_{2m}(t)\right)^T=\left(y_1(t),y_2(t),...,y_m(t),\dot{y}_1(t),\dot{y}_2(t),...,\dot{y}_m(t)\right)^T, \quad (4)$$

систему (3) можна переписати в нормальній формі

$$\frac{d}{dt}\overline{x}(t)=A\overline{x}(t)+z(t)B\overline{x}(t). \quad (5)$$

Матриці A і B обчислюються за формулами

$$A=\begin{bmatrix} 0 & E \\ -(M^*)^{-1}K^* & -(M^*)^{-1}C^* \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -(M^*)^{-1}K_G^* & 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

де E – одинична матриця розмірності $m \times m$.

Для системи (5) розглядається задача Коші з початковими умовами $\vec{x}(0)=\vec{x}_0$, де вектор $\vec{x}_0=\left(x_{01},x_{02},...,x_{02m}\right)^T$ вважається детермінованим.

У тому випадку, коли параметричний вплив має стохастичну природу, $z(t)$ є випадковою функцією часу. Питання про виникнення параметричних коливань еквівалентне питанню про стійкість тривіальних розв'язків рівнянь (5). Внаслідок того, що коефіцієнти рівнянь є випадковими величинами, стійкість розглядається у стохастичному розумінні. У роботі питання стійкості досліджується у середньому на основі моментних функцій фазових координат першого порядку, для отримання яких використовується функціональний підхід [4, 8].

Застосовуємо метод усереднення за ансамблем реалізацій системи (5)

$$\frac{d}{dt}\langle\overline{x}(t)\rangle=A\langle\overline{x}(t)\rangle+B\langle z(t)\overline{x}(t)\rangle, \quad \langle\overline{x}(0)\rangle=\overline{x}_0. \quad (7)$$

Система (7) незамкнена відносно змінних $\langle\vec{x}(t)\rangle=\left(\langle x_1(t)\rangle,\langle x_2(t)\rangle,...,\langle x_{2m}(t)\rangle\right)^T$, бо містить нові невідомі функції $\langle z(t)\vec{x}(t)\rangle=\left(\langle z(t)x_1(t)\rangle,\langle z(t)x_2(t)\rangle,..,\langle z(t)x_{2m}(t)\rangle\right)^T$, які є кореляціями в момент часу t випадкового процесу $z(t)$ з розв'язком $\vec{x}(t)$ системи (7), компоненти якого є функціоналами від випадкового процесу $z(t)$ в інтервалі $[0,t]$. Розщеплення середнього добутку двох функціоналів виконується за формулою Фурутцу-Новікова [5]

$$\langle z(t)\overline{x}(t)\rangle=\int_0^t K(t-\tau)\,\langle\frac{\delta\overline{x}(t)}{\delta z(\tau)}\rangle d\tau\,,\quad k=1,2,...,2m\,. \tag{8}$$

Тут $K(t)$ – кореляційна функція процесу $z(t)$, $\langle\frac{\delta\vec{x}(t)}{\delta z(\tau)}\rangle$ – середнє варіаційної похідної від $\vec{x}(t)$ по z в точці τ.

Система (7) перепишеться наступним чином

$$\frac{d}{dt}\langle\overline{x}(t)\rangle=A\langle\overline{x}(t)\rangle+B\int_0^t K(t-\tau)\,\langle\frac{\delta\overline{x}(t)}{\delta z(\tau)}\rangle d\tau\,,\;\;\langle\overline{x}(0)\rangle=\overline{x}_0\,. \tag{9}$$

За допомогою розщеплення функціоналів $\langle z(t)\vec{x}(t)\rangle$, $(k=1,2,...,2m)$, зроблено перехід від незамкненої системи диференціальних рівнянь (7) відносно вектор-функцій $\langle\vec{x}\rangle$ та $\langle z\vec{x}\rangle$ до незамкненої системи інтегро-диференціальних рівнянь відносно вектор-функцій $\langle\vec{x}\rangle$ та $\langle\frac{\delta x(t)}{\delta z(\tau)}\rangle$. Для вектор-функцій $\langle\frac{\delta\vec{x}(t)}{\delta z(\tau)}\rangle$ записується нова система інтегро-диференціальних рівнянь.

Після варіювання (7) по $z(\tau)$ $(\tau<t)$ маємо систему

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta\vec{x}(t)}{\delta z(\tau)}=A\frac{\delta\vec{x}(t)}{\delta z(\tau)}+z\left(t\right)B\frac{\delta\vec{x}(t)}{\delta z(\tau)}\,, \tag{10}$$

з початковими умовами $\frac{\delta\vec{x}(\tau)}{\delta z(\tau)}=B\vec{x}(\tau)$, $\frac{\delta\vec{x}(t)}{\delta z(\tau)}=0$.

Після усереднення виразу (10) і розщеплення добутку функціоналів за формулою Фурутцу-Новікова отримуємо систему інтегро-диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{dt}\langle\frac{\delta\vec{x}(t)}{\delta z(\tau)}\rangle=A\langle\frac{\delta\vec{x}(t)}{\delta z(\tau)}\rangle+B\int_0^t d\tau_1 K(t-\tau_1)\langle\frac{\delta^2\vec{x}(t)}{\delta z(\tau)\delta z(\tau_1)}\rangle\,,\;\;\tau<\tau_1<t \tag{11}$$

з початковими умовами

$$\langle\frac{\delta\vec{x}(\tau)}{\delta z(\tau)}\rangle=B\langle\vec{x}(\tau)\rangle\,,\;\;\langle\frac{\delta\vec{x}(t)}{\delta z(\tau)}\rangle=0\,,\;\;t<\tau\,. \tag{12}$$

Після варіювання (10) по $z(\tau_1)$ при $(\tau<\tau_1<\tau_2<t)$ маємо систему

$$\frac{d}{dt}\langle\frac{\delta^2\vec{x}(t)}{\delta z(\tau)\delta z(\tau_1)}\rangle=A\langle\frac{\delta^2\vec{x}(t)}{\delta z(\tau)\delta z(\tau_1)}\rangle+B\int_0^t d\tau_2 K(t-\tau_2)\langle\frac{\delta^3\vec{x}(t)}{\delta z(\tau)\delta z(\tau_1)\delta z(\tau_2)}\rangle \tag{13}$$

з початковими умовами

$$\langle\frac{\delta^2\vec{x}(\tau_1)}{\delta z(\tau)\delta z(\tau_1)}\rangle=B\langle\frac{\delta\vec{x}(\tau_1)}{\delta z(\tau)}\rangle\,,\;\;\langle\frac{\delta^2\vec{x}(t)}{\delta z(\tau)\delta z(\tau_1)}\rangle=0\,,\;\;\tau<\tau_1\,. \tag{14}$$

Розв'язок задачі Коші (13) запишемо у вигляді

$$\langle\frac{\delta^2\vec{x}(t)}{\delta z(\tau)\delta z(\tau_1)}\rangle=\vec{\psi}_1(t-\tau_1)B\langle\frac{\delta\vec{x}(\tau_1)}{\delta z(\tau)}\rangle\,, \tag{15}$$

де $\vec{\psi}_1(t)$ − фундаментальна матриця, яка є розв'язком диференціального рівняння

$$\frac{d}{dt}\vec{\psi}_1(t)=A\vec{\psi}_1(t) \tag{16}$$

з початковими умовами $\psi_1(0)=E$.

Після підстановки (15) в рівняння (11) отримаємо вираз

$$\frac{d}{dt}\langle\frac{\delta\vec{x}(t)}{\delta z(\tau)}\rangle=A\langle\frac{\delta\vec{x}(t)}{\delta z(\tau)}\rangle+B\int_0^t d\tau_1 K\left(t-\tau_1\right)\vec{\psi}_1\left(t-\tau_1\right)B\langle\frac{\delta\vec{x}(\tau_1)}{\delta z(\tau)}\rangle\,,\;\;\tau<\tau_1<t\,. \tag{17}$$

Розв'язок задачі Коші (17) запишемо у вигляді

$$\langle\frac{\delta\vec{x}(t)}{\delta z(\tau)}\rangle=\vec{\psi}_2\left(t-\tau\right)B\langle\vec{x}(\tau)\rangle\,, \tag{18}$$

де $\vec{\psi}_2(t)$ − фундаментальна матриця, яка є розв'язком диференціального рівняння

$$\frac{d}{dt}\vec{\psi}_2(t)=A\vec{\psi}_2(t)+B\int_0^t d\tau K(t-\tau)\vec{\psi}_1(t-\tau)B\vec{\psi}_2(\tau)\,,\;\;\tau<t\,. \tag{19}$$

з початковими умовами $\vec{\psi}_2(0)=E$.

Фундаментальна матриця $\vec{\psi}_1(t)$ має вигляд

$$\vec{\psi}_1(t)=\left\langle\frac{\delta\vec{x}(t)}{\delta z(\tau)}\right\rangle=\begin{bmatrix}\left\langle\dfrac{\delta x_1(t)}{\delta z(\tau)}\right\rangle\\ \left\langle\dfrac{\delta x_2(t)}{\delta z(\tau)}\right\rangle\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\psi_{11}\\ \psi_{12}\end{bmatrix}. \tag{20}$$

В свою чергу, фундаментальна матриця $\vec{\psi}_2(t)$ задається виразом

$$\vec{\psi}_2(t)=\left\langle \vec{x}(t)\right\rangle=\begin{bmatrix}\left\langle x_1(t)\right\rangle\\ \left\langle x_2(t)\right\rangle\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\psi_{21}\\ \psi_{22}\end{bmatrix}. \tag{21}$$

З урахуванням формул (20) та (21) надамо системі (19) наступного вигляду

$$\frac{d}{dt}\left\langle \vec{x}(t)\right\rangle=A\left\langle \vec{x}(t)\right\rangle+B\int_0^t K\left(t-\tau\right)\vec{\psi}_1\left(t-\tau\right)B\left\langle \vec{x}(\tau)\right\rangle d\tau,\ 0\le\tau\le t. \tag{22}$$

Зробимо перехід до часу $u=t-\tau$ у виразі (22) при обчисленні інтегралу, враховуючи, що при $\tau=0$ $u=t$, а при $\tau=t$ $u=0$:

$$\int_0^t K(t-\tau)\vec{\psi}_1(t-\tau)B\left\langle \vec{x}(\tau)\right\rangle d\tau=\int_t^0 K(u)\vec{\psi}_1(u)B\left\langle \vec{x}(t-u)\right\rangle(-du)=$$

$$=\int_0^t K(u)\vec{\psi}_1(u)B\left\langle \vec{x}(t-u)\right\rangle du. \tag{23}$$

Тоді рівняння (22) перепишеться у вигляді наступних інтегро-диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{dt}\left\langle \vec{x}(t)\right\rangle=A\left\langle \vec{x}(t)\right\rangle+B\int_0^t K(u)\,\vec{\psi}_1(u)B\left\langle \vec{x}(t-u)\right\rangle du,\ \ 0\le u\le t. \tag{24}$$

Інтегро-диференціальні рівняння (24) описують стохастичні параметричні коливання пружної системи з урахуванням попередніх станів системи. Задача стохастичної стійкості сформульована у середньому відносно моментних функцій фазових координат першого порядку.

2. Тестова задача. Досліджуються параметричні коливання лінійної пружної системи з одним ступенем вільності при стаціонарному експоненціально-корельованому впливі з урахуванням попередніх станів системи. Стохастичні параметричні коливання пружної системи описуються за допомогою рівняння (24). Матриці A і B обчислюються за формулами

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega_0^2 & -2\xi\omega_0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -\omega_0^2 & 0\end{bmatrix}. \tag{25}$$

Компоненти фундаментальної матриці $\vec{\psi}_1(t)$ є розв'язком системи диференціальних рівнянь затухаючих коливань

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\psi_{11}(t)=\psi_{12}(t),\\ \dfrac{d}{dt}\psi_{12}(t)=-\omega_0^2\psi_{11}(t)-2\xi\omega_0\psi_{12}(t)\end{cases} \tag{26}$$

з початковими умовами $\psi_{11}(0)=1,\ \psi_{12}(0)=0.$

Ці компонети мають наступний вигляд

$$\begin{cases} \psi_{11}(t)=e^{-\xi\omega_0 t}\left(\cos\omega_D t+\dfrac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_D t\right), \\ \psi_{12}(t)=e^{-\xi\omega_0 t}\,\dfrac{\sin\omega_D t}{\omega_D} \end{cases} \tag{27}$$

де $\omega_D=\sqrt{\omega_0^2-\xi^2\omega_0^2}$.

Розв'язок рівняння (24) шукаємо у вигляді

$$\left\langle \vec{x}(t)\right\rangle=\begin{cases} \left\langle x_1(t)\right\rangle=e^{\lambda t}\sin\omega t, \\ \left\langle x_2(t)\right\rangle=\left\langle \dfrac{dx_1(t)}{dt}\right\rangle=\lambda e^{\lambda t}\sin\omega t+e^{\lambda t}\omega\cos\omega t, \end{cases} \tag{28}$$

а за випадкове навантаження приймаємо експоненціально-корельований вплив з кореляційною функцією

$$K(t)=\sigma_0^2 e^{-\alpha t}\,, \tag{29}$$

де α – параметр, який характеризує кореляційну залежність процесу в різні моменти часу t , σ_0^2 – інтенсивність випадкового впливу.

Систему інтегро-диференціальних рівнянь, що описує стохастичні параметричні коливання пружної системи (24) з урахуванням формул (25)-(29) представимо у вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left\langle x_1(t)\right\rangle=\lambda e^{\lambda t}\sin\omega t+e^{\lambda t}\omega\cos\omega t \\ \dfrac{d}{dt}\left\langle x_2(t)\right\rangle=-\omega_0^2 e^{\lambda t}\sin\omega t-2\xi\omega_0\left(\lambda e^{\lambda t}\sin\omega t+e^{\lambda t}\omega\cos\omega t\right)+ \\ +\omega_0^2\sigma_0^2\displaystyle\int_{t-\tau_k}^{\tau_k} e^{-\alpha u}e^{-\xi\omega_0 u}\left(\cos\omega_D u+\dfrac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_D u\right)e^{\lambda(t-u)}\sin\omega\left(t-u\right)du+ \\ +\lambda^2 e^{\lambda t}\sin\omega t+\lambda e^{\lambda t}\omega\cos\omega t+\lambda e^{\lambda t}\omega\cos\omega t-e^{\lambda t}\omega^2\sin\omega t+ \\ -\omega_0^2\sigma_0^2\displaystyle\int_{0}^{\tau_k} e^{-\alpha u}e^{-\xi\omega_0 u}\left(\cos\omega_D u+\dfrac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_D u\right)e^{\lambda(t-u)}\sin\omega\left(t-u\right)du \end{cases} \tag{30}$$

Введемо позначення

$$F(t-\tau_k,t)=\int_{t-\tau_k}^{t} e^{-\alpha u}e^{-\xi\omega_0 u}\left(\cos\omega_D u+\frac{\xi}{1-\xi^2}\sin\omega_D u\right)e^{\lambda(t-u)}\sin\omega(t-u)du\,, \tag{31}$$

$$R(0,\tau_k)=\lambda^2 e^{\lambda t}\sin\omega t+\lambda e^{\lambda t}\omega\cos\omega t+\lambda e^{\lambda t}\omega\cos\omega t-e^{\lambda t}\omega^2\sin\omega t+$$
$$+2\xi\omega_0(\lambda e^{\lambda t}\sin\omega t+e^{\lambda t}\omega\cos\omega t)-$$
$$-\omega_0^2\sigma_0^2\left[\frac{1}{2}e^{\lambda t}\left\{\sin\omega t\left(\frac{e^{\beta\tau_k}(\beta\cos\omega_1^*\tau_k+\omega_1^*\sin\omega_1^*\tau_k)}{\beta^2+\omega_1^{*2}}+\frac{e^{\beta\tau}(\beta\cos\omega_2^*\tau_k+\omega_2^*\sin\omega_2^*\tau_k)}{\beta^2+\omega_2^{*2}}\right)-\right.\right.$$
$$-\cos\omega t\left(\frac{e^{\beta\tau_k}(\beta\cos\omega_1^*\tau_k-\omega_1^*\cos\omega_1^*\tau_k)}{\beta^2+\omega_1^{*2}}-\frac{e^{\beta\tau_k}(\beta\sin\omega_2^*\tau_k-\omega_2^*\cos\omega_2^*\tau_k)}{\beta^2+\omega_2^{*2}}\right)+$$
$$+\frac{\xi\sin\omega t}{\sqrt{1-\xi^2}}\left(\frac{e^{\beta\tau_k}(\beta\sin\omega_1^*\tau_k-\omega_1^*\cos\omega_1^*\tau_k)}{\beta^2+\omega_1^{*2}}+\frac{e^{\beta\tau_k}(\beta\sin\omega_2^*\tau_k-\omega_2^*\cos\omega_2^*\tau_k)}{\beta^2+\omega_2^{*2}}\right)-$$
$$-\frac{\xi\cos\omega t}{\sqrt{1-\xi^2}}\left(\frac{e^{\beta\tau_k}(\beta\cos\omega_2^*\tau_k+\omega_2^*\sin\omega_2^*\tau_k)}{\beta^2+\omega_2^{*2}}-\frac{e^{\beta\tau_k}(\beta\cos\omega_1^*\tau_k+\omega_1^*\sin\omega_1^*\tau_k)}{\beta^2+\omega_1^{*2}}\right), \quad (32)$$

де $\beta=-\alpha-\xi\omega_0-\lambda$, $\omega_1^*=\omega_D+\omega$ та $\omega_2^*=\omega_D-\omega$.

З урахуванням (31) та (32) система інтегро-диференціальних рівнянь (30) перепишеться у вигляді

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}\langle x_1(t)\rangle=\lambda e^{\lambda t}\sin\omega t+e^{\lambda t}\omega\cos\omega t,\\ \frac{d}{dt}\langle x_2(t)\rangle=-\omega_0^2 e^{\lambda t}\sin\omega t-2\xi\omega_0(\lambda e^{\lambda t}\sin\omega t+e^{\lambda t}\omega\cos\omega t)+\\ \qquad +\omega_0^2\sigma_0^2 F(t,t-\tau_k)+R(0,\tau_k).\end{cases} \quad (33)$$

В роботі для отримання розв'язку системи (33) застосовується 7-стадійний неперервний метод Рунге-Кутта п'ятого порядку із вкладеними формулами Дормана-Принса [4]. На кожному кроці інтегрування рівняння (33) інтеграл $F(t,t-\tau_k)$ визначається за допомогою формули Сімсона-Корноухова.

На рис. 1 представлені результати дослідження впливу інтенсивності стохастичного навантаження σ_0^2 на стохастичну стійкість параметричних коливань системи при $\omega_0=\omega=1{,}0\,c^{-1}$; $\xi=0{,}05$; $\tau_k=5\,c$; $\alpha=\lambda=1{,}0$. При $\sigma_0^2=0$ параметричні коливання відсутні, спостерігаються затухаючі коливання системи. При збільшені інтенсивності параметричного навантаження збільшується амплітуда параметричних коливань.

Стійкий режим параметричних коливань системи спостерігається при $\sigma_0^2=0{,}01$ (рис. 2,*а*), а нестійкий − при $\sigma_0^2=0{,}25$ (рис. 2,*б*) та $\sigma_0^2=1{,}0$.

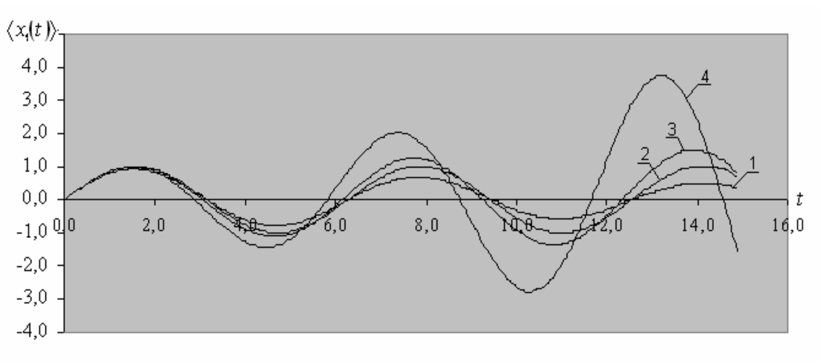
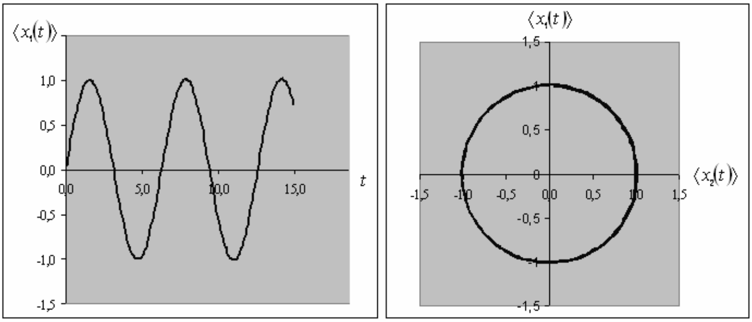
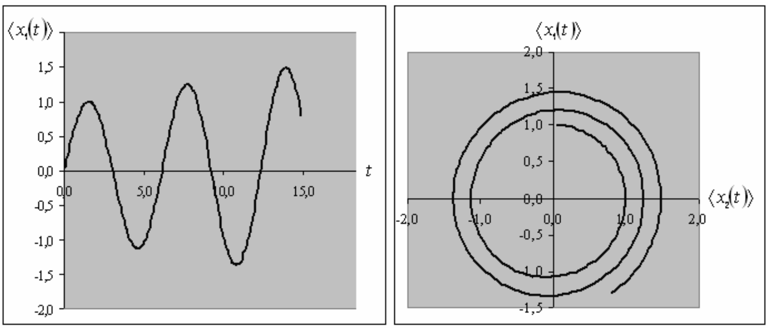


Рис. 1. Вплив інтенсивності стохастичного навантаження на динамічну поведінку системи (1 - $\sigma_0^2 = 0$; 2 – $\sigma_0^2 = 0.01$; 3 – $\sigma_0^2 = 0.25$; 4 – $\sigma_0^2 = 1.0$)



а



б

Рис. 2. Вплив інтенсивності стохастичного навантаження на стійкість системи

Оцінка впливу коефіцієнта демпфірування ξ на динамічну стійкість системи представлена на рис. 3 і виконана при $\omega_0 = \omega = 1{,}0\ c^{-1}$; $\sigma_0^2 = 0{,}25$; $\tau_k = 5\ c$; $\alpha = \lambda = 1{,}0$. При збільшенні коефіцієнта демпфірування амплітуда параметричних коливань системи зменшується, при цьому спостерігається перехід з нестійкого режиму коливань у стійкий.

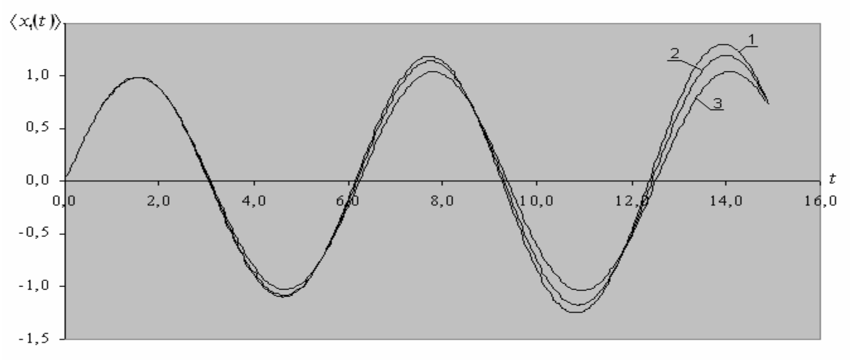


Рис. 3. Вплив коефіцієнта демпфірування на динамічну поведінку системи (1 – ξ=0,05; 2 – ξ=0,2; 3 – ξ=0,5)

Досліджено вплив проміжку часу τ_k, який характеризує попередній стан системи, на стійкість розв'зку задачі (33) при $\omega_0 = \omega = 1{,}0\ c^{-1}$; $\sigma_0^2 = 1{,}0$; $\xi = 0{,}05$; $\alpha = \lambda = 1{,}0$ (рис. 4).

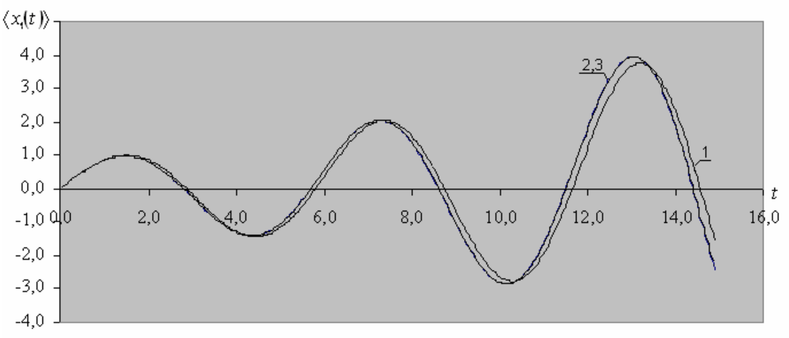


Рис. 4 Вплив проміжку часу τ_k на динамічну поведінку системи

(1 – τ_k =2,5 c; 2 – τ_k =5 c; 3 – τ_k =7,5 c)

Криві, що описують стохастичні параметричні коливання системи при $\tau_k = 5\ c$ та $\tau_k = 7,5\ c$, співпадають. При $\tau_k = 2,5\ c$ коливання мають меншу амплітуду і більший період коливань. Це свідчить про те, що проміжок часу, який характеризує попередній стан системи, необхідно підбирати таким чином, щоб розв'язок задачі (33) був стійким.

Висновок. Розроблена чисельна методика дозволяє на основі редукованих моделей параметричних коливань пружних систем при стохастичному впливі з урахуванням їх попередніх станів дослідити динамічну поведінку пружної системи та оцінити її стохастичну стійкість.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. - М.: Гостехиздат, 1956. - 600 с.
2. *Шмидт Г.* Параметрические колебания. – М.: Издательство „Мир", 1978. – 336 с.
3. *Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Э.А.* Устойчивость нелинейных механических систем. – Львов.: „Вища школа", 1982. – 255 с.
4. *Хайрер Э., Нерсетт С. , Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Издательство „Мир", 1990. – 512 с.
5. *Баженов В.А., Дехтярюк Є.С., Ворона Ю.В.* Динаміка споруд. – К.: ПАТ Віпол, 2012. – 342 с.
6. *Гоцуляк Є.А., Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О., Борисенко В.Г.* Методика редукування рівнянь в задачах параметричних коливань конструкцій //Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА. – 2004. – №74.
7. *Шимкович Д.Г.* Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows.– М.: ДМК Пресс, 2001.– 448 с.

REFERENCES

1. *Bolotyn V.V.* Dynamycheskaya ustoychyvost' upruhykh system (Dynamic Stability of Elastic Systems). - M.: Gostekhyzdat, 1956. - 600 s.
2. *Shmydt H.* Parametrycheskye kolebanyya (Parametric Vibrations). – M.: Yzdatel'stvo „Myr", 1978. – 336 s.
3. *Gulyaev V.Y., Bazhenov V.A., Gotsulyak Ye.A.* Ustoychyvost' nelyneynykh mekhanycheskykh system (Stability of Nonlinear Mechanical Systems). – L'vov.: „Vyshcha shkola", 1982. – 255 s.
4. *Khayrer Э., Nersett S. , Vanner H.* Reshenye obyknovennykh dyfferentsyal'nykh uravnenyy. Nezhestkye zadachy. – M.: Yzdatel'stvo „Myr", 1990. – 512 s.
5. *Bazhenov V.A., Dekhtyaryuk Ye.S., Vorona Yu.V.* Dynamika sporud (Dynamic of Structures). – K.: PAT Vipol, 2012. – 342 s.
6. *Gotsulyak Ye.A., Dekhtyaryuk Ye.S., Luk'yanchenko O.O., Borysenko V.H.* Metodyka redukuvannya rivnyan' v zadachakh parametrychnykh kolyvan' konstruktsiy (The Technique for Reduction of Equations of Structures Parametric Vibrations) //Opir materialiv i teoriya sporud. K.: KNUBA. – 2004. – #74.
7. *Shymkovych D.H.* Raschet konstruktsyy v MSC/NASTRAN for Windows (Structure Analisys with the MSC/NASTRAN for Windows) .– M.: DMK Press, 2001.– 448 s.

Стаття надійшла до редакції 20.01.2014 р.

Ворона Ю.В., Лукьянченко О.А., Костина Е.В.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ ИХ ПРЕДЫДУЩИХ СОСТОЯНИЙ

Построение редуцированных моделей стохастических параметрических колебаний упругих систем с учетом их предыдущих состояний выполнено на основе методов конечных элементов, обобщенных координат, асимптотического метода и функционального подхода. Задача стохастической устойчивости сформулирована в среднем относительно моментных функций фазовых координат первого порядка. Решение задачи выполнено с помощью 7-стадийного непрерывного метода Рунге-Кутта 5-го порядка и вложенных формул Дормана-Принса. В качестве примера исследована стохастическая устойчивость параметрических колебаний упругой системы с одной степенью свободы с учетом ее предыдущих состояний.

Ключевые слова: параметрические колебания, стохастическая устойчивость, моментные функции, редуцированная модель.

Vorona Y.V., Lukianchenko O.O, Kostina O.V.

STOCHASTIC PARAMETRIC VIBRATIONS OF ELASTIC SYSTEMS WITH REGARD TO THEIR PREVIOUS STATES

Reduced models of stochastic parametric vibrations of elastic systems with regard to their previous states were constructed on the base of the finite element method, generalized coordinates method, asymptotic method and functional approach. Stochastic stability problem was formulated in the average for the moment functions of the first order phase coordinates. The stability of stochastic parametric vibrations of the single degree of freedom system with regard to its previous states was investigated by the 7-stages 5-order continuous Runge-Kutta method and nested formulas Dormand-Prince.

Key words: parametric vibration, stochastic stability, moment functions, reduced model.