

УДК 539.3

П.П. Лізунов<sup>1</sup>, д-р техн. наук,О.І. Гулярь<sup>1</sup>, д-р техн. наук,І.І. Солодей<sup>1</sup>, д-р техн. наук

<sup>1</sup>Київський національний університет будівництва і архітектури,  
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680

## УНІВЕРСАЛЬНИЙ АЛГОРИТМ ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ДЕФОРМУВАННЯ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ КОНСТРУКЦІЙ

Розроблено чисельний алгоритм та реалізуючі його програмні засоби для дослідження нелінійного деформування і тріщиноутворення просторових залізобетонних конструкцій. Використовується метод скінчених елементів. Чисельне моделювання нелінійного деформування та руйнування матеріалів здійснюється згідно з феноменологічними теоріями. Алгоритм розрахунку ґрунтується на методи Ньютона-Канторовича. Достовірність результатів підтверджена шляхом порівняння з експериментальними даними і чисельними розрахунками, виконаними за іншими методиками.

**Ключові слова:** залізобетонні просторові конструкції, нелінійне деформування, тріщиноутворення, феноменологічні теорії, метод скінчених елементів.

### Вступ

Дослідження нелінійного деформування та прогресуючого руйнування залізобетонних конструкцій і металевих елементів конструкцій в рамках єдиного алгоритму потребує спеціальних алгоритмічних і програмних розробок. Їх складність зумовлена різним характером прояву граничного стану бетону і металу (перший руйнується крихко, другий "тече"), застосуванням деформаційної теорії пластичності для опису роботи бетону, що передує його руйнуванню та асоційованого закону теорії пластичного плину для металу, використанням великого обсягу різномірної по змісту оперативної інформації.

Розглянуті процеси відносяться до класу еволюційних у тому розумінні, що для одержання достовірної картини напружено-деформованого стану досліджуваних конструкцій необхідне урахування історії навантаження. Розв'язок таких задач найкраще здійснюється на базі кроково-ітераційних алгоритмів методу продовження за параметром. Розроблений у даній роботі алгоритм відноситься до зазначеного типу і передбачає наявність як силових так і кінематичних (вимушені переміщення) впливів. Рівень кожного з них задається як функція ведучого параметра алгоритму - номера кроку інтегрування нелінійних рівнянь, що описують стан дискретної моделі метода скінчених

елементів МСЕ розглянутого об'єкта.

Обґрунтування і побудова математичної та скінченноелементної моделей, які використовуються в представлених дослідженнях, розглянуті у попередніх роботах авторів [1, 2].

### **1. Реалізація алгоритму чисельного моделювання нелінійної роботи залізобетонних конструкцій**

Прийнята в даній розробці модель даних відповідає квазірегулярній структурі дискретної моделі [8] і реалізує всі переваги такого підходу в плані економії ресурсів ЕОМ і простоти алгоритмів керування даними.

Алгоритм чисельного моделювання нелінійної роботи залізобетонних конструкцій містить у собі наступні основні етапи (рис. 1):

1. Формування і наповнення бази даних, що відображають топологічні та фізико-механічні характеристики скінченноелементної моделі об'єкта розрахунків.

2. Розв'язання фізично нелінійної задачі.

3. Модифікація даних про дискретну модель з урахуванням утворення тріщин у бетоні.

Розв'язання фізично нелінійної задачі реалізовано шляхом організації внутрішнього циклу. Для визначення напружено-деформованого стану з урахуванням пластичних деформацій усіх конструктивних матеріалів виконуються наступні процедури:

1. Обчислення вузлових реакцій  $\{R^i\}$  на даній ітерації ( $i$  - номер поточної ітерації) по напруженнях  $\tilde{\sigma}^{j-1}$ , накопичених на попередньому кроці ( $j$  - номер поточного кроку), і приростах напружень  $\Delta\tilde{\sigma}^{j-1}$ , що є наслідком приросту переміщень  $\{\Delta U^{i-1}\}$ , які накопичені на попередніх ітераціях поточного кроку  $j$ :

$$\{R^i\} = \{R^i(\tilde{\sigma}^{ji})\}, \quad \tilde{\sigma}^{ji} = \tilde{\sigma}^{j-1} + \Delta\tilde{\sigma}^{i-1}(\{\Delta U^{i-1}\}). \quad (1)$$

При обчисленні напружень для кожного матеріалу використовуються специфічні рівняння стану, які описують його пружнопластичне деформування.

2. Обчислення вузлових навантажень  $\{P^i\}$ , що інтерпретують зовнішні силові впливи.

3. Перевірка рівноваги дискретної моделі шляхом порівняння значень вузлових навантажень і реакцій, тобто обчислення вузлових нев'язок:

$$\{r^i\} = \{P^i\} - \{R^i\}. \quad (2)$$

4. Обчислення приростів переміщень  $\{\Delta U^i\}$  на даній ітерації. Вузлові нев'язки використовуються як „додаткові навантаження” (права частина лінеаризованої системи рівнянь):

$$\{\Delta U^i\} = [K]^{-1} \{r^i\}, \quad (3)$$

де  $[K]$  - ефективна лінеарізована матриця жорсткості ансамблю скінченних елементів (СЕ).



Рис. 1. Алгоритм чисельного моделювання деформування та руйнування залізобетонних конструкцій

5. Накопичення приростів вузлових переміщень на даній ітерації поточного кроку:

$$\{\Delta U^j\} = \{\Delta U^j\} + \{\Delta U^i\}. \quad (4)$$

6. Перевірка точності розв'язання фізично нелінійної задачі. Точність вважається досягнутою тоді, коли сума квадратів вузлових нев'язок стає менше суми квадратів вузлових навантажень, помноженої на деяке мале число  $\varepsilon$ :

$$\|\{P^i\}\|^2 < \varepsilon \|\{P^j\}\|^2, (\varepsilon = 0.001). \quad (5)$$

Якщо умова (5) не виконується, здійснюється перехід до процедури 1.

По закінченні ітераційного процесу накопичуються прирости компонент вектору переміщень  $\{\Delta U^j\}$ , деформацій  $\Delta \tilde{\varepsilon}^j$  бетону і арматури, а також напружень  $\Delta \tilde{\sigma}^j$ . Для СЕ, що моделюють металоконструкції накопичуються значення параметру Одквіста.

Для всіх скінченних елементів в межах залізобетонної конструкції виконується перевірка прийнятого критерію міцності бетону. Якщо хоча б в одному СЕ порушується умова міцності, проводиться "нанесення тріщин". Ця процедура полягає в обчисленні та збереженні ознак наявності і стану (відкриття або закриття) тріщин, а також косинусів кутів направляючих нормалей відповідних площин. Крім того, для відкритих тріщин напруження корегуються з урахуванням рівності нулю нормальних і дотичних напружень у площині руйнування.

Для перерозподілу зусиль, які сприймалися зруйнованим бетоном, знову вирішується фізично нелінійна задача. Чергове збільшення ведучого параметра алгоритму, тобто  $(j + 1)$ -й крок інтегрування, виконується лише тоді, коли, з одного боку, дотримується умова рівноваги, а з іншого - у жодному скінченному елементі не порушується критерій міцності бетону.

Урахування геометричної нелінійності не вимагає модифікації алгоритму, представленого на рис. 1. У цьому випадку при обчисленні вузлових реакцій СЕ використовується тензор кінцевих деформацій, а по закінченню ітераційного процесу виконується корекція координат вузлів на величину приросту переміщень  $\{\Delta U^j\}$ .

Матриця коефіцієнтів при невідомих розрахункової системи алгебраїчних рівнянь (лінеаризована матриця жорсткості  $[K]$ ) формується на першому кроці інтегрування, а потім - по мірі необхідності: при зміні жорсткості конструкції, що може бути викликано утворенням тріщин або моделюванням процесу укладання та твердіння бетону, а також при істотній зміні геометрії розрахункової схеми.

Таким чином, опис нелінійної роботи конструкції, що зумовлена фізичною нелінійністю бетону і металу на поточному кроці інтегрування, базується на методі додаткових навантажень. В той же час для опису нелінійності, що викликана тріщиноутворенням і накопиченням великих деформацій, використовується метод змінних жорсткостей. Такий комбінований алгоритм (модифікований метод Ньютона-Канторовича [5]) є найбільш ефективним при прогнозуванні спільної роботи залізобетонних та металевих конструкцій.

Чисельні експерименти показали, що використання початкових модулів пружності при формуванні лінеаризованої матриці жорсткості  $[K]$  є більш переважним у порівнянні з варіантами використання січних і дотичних модулів, оскільки забезпечує стійку збіжність результатів до точного і в остаточному підсумку дозволяє досягти економії процесорного часу ЕОМ.

Розрахункові співвідношення теорії деформації залізобетону з тріщинами М.І. Карпенко [6, 7] дозволяють врахувати спільність роботи арматури і розтягнутих блоків бетону («смуг») між тріщинами. Супротив смуг бетону розтягу моделюється за допомогою коефіцієнта Мурашова  $\psi_s$ . До утворення тріщин, коли робота кожної з компонент залізобетону (бетону і арматури) враховується окремо приймається, що  $\psi_s=1$ . Безпосередньо після утворення тріщин модуль пружності арматури  $E_s$  умовно зменшується в  $\psi_s$  разів ( $\psi_s < 1$ ). Подальше навантаження поступово веде до повного порушення зчеплення арматури з бетоном. Такий стан відповідає коефіцієнту  $\psi_s=1$ . Відомі різні види функції  $\psi_s = \psi_s(\epsilon_s)$ , наприклад [10, 11, 13, 14]. Серед них залежності, наведені в [10, 14], орієнтовані на застосування в чисельних дослідженнях континуальних об'єктів і викладені детально для реалізації, але показують значні розбіжності при кількісній оцінці роботи смуг бетону між тріщинами. У зв'язку з цим, на основі розробленої математичної моделі опору бетону з урахуванням концентрації напружень і методики чисельного моделювання руйнування залізобетонних конструкцій, було виконано чисельне дослідження розтягу залізобетонного зразка, в результаті якого встановлена функція  $\psi_s(\epsilon_s)$ . За об'єкт дослідження прийнятий зразок із стрижнем періодичного профілю, що розташований вздовж вісі зразка [3] (рис. 2).

На основі отриманої діаграми  $Q=Q(U)$  була побудована функція Мурашева  $\psi_s(\epsilon_s)$ , що характеризує спільну роботу арматури і бетону за наявності тріщин шляхом умовного збільшення жорсткості арматури:

$$\psi_s = \frac{\mu_s \pi r^2 E_s U}{QL}, \quad (6)$$

де  $\mu_s=0.02$  - коефіцієнт армування; радіус і довжина циліндричного зразка:  $r = 7$  см,  $L = 20$  см. Графік отриманої таким чином функції  $\psi_s(\epsilon_s)$  наведено на рис. 2, крива 1.

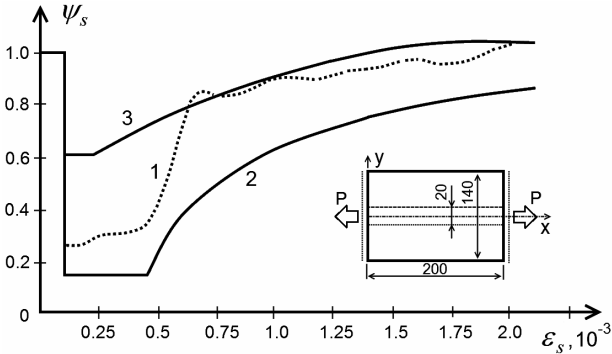


Рис. 2. Графіки коефіцієнта  $\psi_s$  як функції деформації арматури

Крива 2 – графік функції  $\psi_s(\epsilon_s)$ , обчисленої відповідно до [10]:

$$\psi_s = 1 - s \frac{N_{bt}}{\sigma_s f_s} = 1 - s \frac{R_{bt}}{\mu_s E_s \epsilon_s}, \quad (7)$$

де  $s=1.1$  - коефіцієнт, що враховує профіль арматури;  $N_{bt}$  - зусилля, що відповідає утворенню тріщин у бетоні;  $f_s$  - площа поперечного перерізу арматурного стрижня. На рис. 2, крива 3 відповідає функції  $\psi_s(\epsilon_s)$ , яка запропонована авторами [14] і в даному дослідженні приймалася в дещо спрощеному вигляді:

$$\psi_s = 1 - B(\bar{\epsilon}_s - \epsilon_s)^2, \quad (8)$$

де

$$B = (1 - \bar{\psi} \bar{\epsilon}_s \bar{\epsilon}_s) / (\bar{\epsilon}_s - \bar{\epsilon}_s)^2, \quad \bar{\epsilon}_s = 1.5 \epsilon_{RT}, \quad \bar{\epsilon}_s = \frac{\sigma_i}{E_s},$$

$$\bar{\psi} = 0.383 + 62.5 \mu_s + 208 \mu_s^2, \quad 0.1 \leq \bar{\psi} < 1.$$

Тут  $\epsilon_{RT} = 8 \cdot 10^{-5}$  - гранична деформація бетону при осьовому розтязі.

При цьому  $\mu_s$  обчислюється як відношення площі поперечного перерізу арматури до усієї площі вертикального перерізу балки-стілки. Таким чином, застосування формули (8) припускає використання характерного для інженерних розрахунків прийому обчислення коефіцієнта армування  $\mu_s$ . Це не узгоджується з підходом, заснованим на дискретизації досліджуваного об'єкту по МСЕ, коли  $\mu_s$  обчислюється як відношення площі поперечного перерізу арматури до площі СЕ, в якому вона розташована.

Порівняння графіків, представлених на рис. 2, дозволяє зробити висновок про те, що отримана в результаті чисельного моделювання функція  $\psi_s(\varepsilon_s)$  якісно узгоджується з її варіантами у вигляді (7) та (8), забезпечуючи значення  $\psi_s$ , які лежать в області, що обмежена знизу функцією (7), а згори - (8). На початковій ділянці (при  $\varepsilon_s < 0.5 \cdot 10^{-3}$ ) графік запропонованої функції  $\psi_s(\varepsilon_s)$  (крива 1) ближче до функції (7 - крива 2). Потім крива 1 наближається до кривої 3 - графіку функції (8) і слідує за нею до кінця області визначення  $\varepsilon_s = 2.1 \cdot 10^{-3}$ .

Викладений вище чисельний спосіб отримання функції  $\psi_s(\varepsilon_s)$  заснований на детальному математичному моделюванні процесів взаємодії арматури періодичного профілю і бетонного масиву, яке супроводжується пластичною деформацією сталі і бетону та утворенням тріщин. Перевагою такого підходу є ясна інтерпретація характеру функції  $\psi_s(\varepsilon_s)$ , тобто можливість провести аналогію між закономірностями її зміни і тими фізичними явищами, які відбуваються при навантаженні зразка.

## **2. Дослідження деформативності та несучої здатності залізобетонної балки-стілки**

Для дослідження можливостей розробленої методики чисельного моделювання нелінійної роботи залізобетонних конструкцій в цілому і зокрема такого важливого її аспекту, як опис деформування залізобетону із тріщинами з урахуванням роботи розтягнутих смуг бетону в зонах тріщиноутворення, виконано розрахунки балки-стілки [4]. Вибір об'єкту розрахунків зумовлений тим, що, як показали чисельні експерименти [14], введення змінних величин  $\psi_s$  позначається лише на результатах розрахунків слабоармованих конструкцій. Так при  $\mu_s > 0.01$ , як правило, досить прийняти  $\psi = 1$ .

Коефіцієнти армування розглянутої балки-стілки БО-1-1: у поперечному напрямку  $\mu_1 = 0.008$ , а в поздовжньому -  $\mu_2 = 0.0033$ . Посилене поперечне армування мало на меті запобігти утворенню похилих тріщин і забезпечити руйнування балки-стілки вздовж нормальних перерізів.

На рис. 3 наведені розміри конструкції і схема армування. Ступінь дискретизації і розмір кроку по навантаженню встановлені на основі попередніх розрахунків.

Плоский напружений стан виключав необхідність урахування деформаційного зменшення міцності бетону - спадаючої гілки діаграми  $\sigma - \varepsilon$ . Згідно [4], при виготовленні балки-стілки використовувався бетон

проектного класу В30, міцність якого в момент випробувань становила  $R_b = 32.2 \text{ МПа}$ . Для визначення межі міцності бетону при одноосьовому розтязї  $R_{bt}$  використовувалися формули [12], які пов'язують призмову міцність  $R_b$  із кубиковою  $R$ , і як слідство з  $R_{bt} (\text{кг/см}^2)$  - міцністю при розтязї:

$$\frac{R_{bt}}{R} = 0.8 - 0.0001R; R_{bt} = \frac{50R}{450 + R}. \quad (9)$$

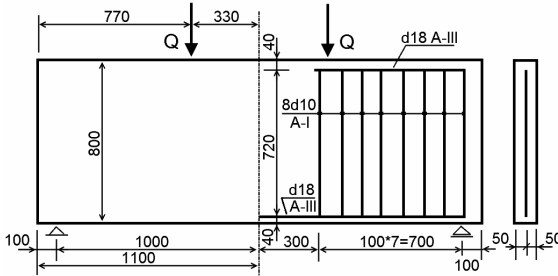


Рис. 3. Розміри конструкції та схема армування

Звідси  $R_{bt} = 2.43 \text{ МПа}$ . Початковий модуль пружності бетону з урахуванням теплової обробки виробу приймався  $E_b = 3 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ . Поздовжнє армування здійснювалося стрижнями діаметром 18 мм класу А-III, а поперечне – 10 мм А-I. Пружнопластична робота арматури моделювалася відповідно до дволанцюгової діаграми  $\sigma$ – $\varepsilon$ . Межа пластичності арматурної сталі обчислювалася на основі нормативних опорів  $R_{sn}$  [13] з урахуванням коефіцієнта варіації  $v_a = 0.067$  [9]:  $\sigma_i = 440 \text{ МПа}$  для поздовжнього армування і  $\sigma_i = 260 \text{ МПа}$  для поперечного. Модуль пружності арматури приймався  $E_s = 2.1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ , а нахил діаграми  $\sigma$ – $\varepsilon$  після досягнення межі пластичності в 10 разів менший, ніж для пружної ділянки.

По результатам чисельних експериментів побудовані графіки залежності навантаження  $Q$  від прогину  $U_A$  середньої точки прольоту (рис. 4). Криві 1, 2 відображають деформування без урахування роботи розтягнутого бетону в зонах тріщиноутворення, при цьому крива 1 отримана з припущення лінійно-пружної роботи бетону, а крива 2 - з урахуванням його фізичної нелінійності. Криві 3, 4 та 5 враховують пластичні деформації і тріщиноутворення в бетоні, а також спільну роботу бетону і арматури після утворення тріщин. Вид функції  $\psi_s(\varepsilon_s)$



приймався для кривої 3 згідно рис. 2 (графік 2), кривої 4 згідно рис. 2 (графік 3), 5 - на основі чисельного експерименту рис. 2 (графік 1).

У всіх постановках задачі враховували пружнопластичну роботу арматурної сталі. Експериментальний графік  $Q-U_A$  позначено на рис. 3 цифрою 0. В роботі [4] як руйнівне зазначено навантаження  $Q=290$  кН, якому на графіку  $Q-U_A$  відповідає прогин  $U_A = 2.0$ .

Порівняння результатів різних розрахунків і випробувань для розглянутої конструкції показало, що нехтування роботою розтягнутого бетону в зонах тріщиноутворення веде до значної похибки.

Характерно, що урахування фізичної нелінійності дуже мало вплинуло на результати розрахунків балки-стілки, де головну роль відіграли розтягувальні напруження.

Для всіх трьох функцій  $\psi_s(\varepsilon_s)$ , що були використані, урахування спільної роботи бетону і арматури при наявності тріщин дозволило суттєво збільшити точність результатів розрахунків. Найкраще узгодження з даними випробувань показує крива 5, як за значенням несучої здатності, так і по характеру графіка  $Q-U_A$  (рис. 4,б).

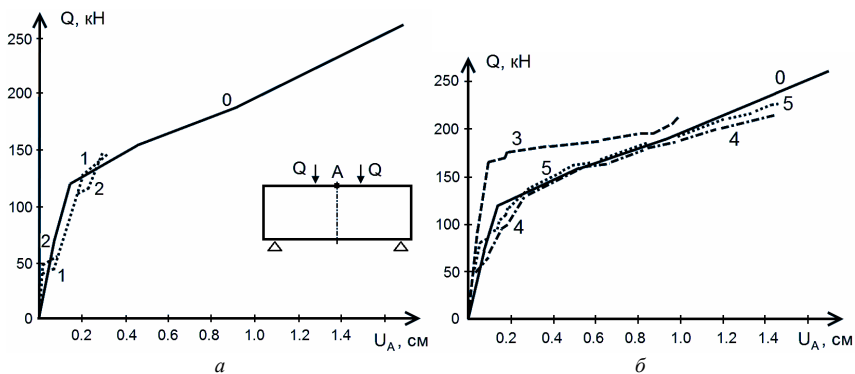


Рис. 4. Графіки функції навантаження  $Q$  - вертикальне переміщення точки  $A$  при різних  $\psi_s$ :

а: 0 – експеримент; 1 – бетон пружний; 2 – бетон пружнопластичний ( $\psi_s = 1$ );

б: 0 – експеримент; 3, 4, 5 – бетон пружнопластичний при різних  $\psi_s = \psi_s(\varepsilon_s)$

На рис. 5 показано розвиток зон тріщиноутворення в процесі навантаження балки-стілки.

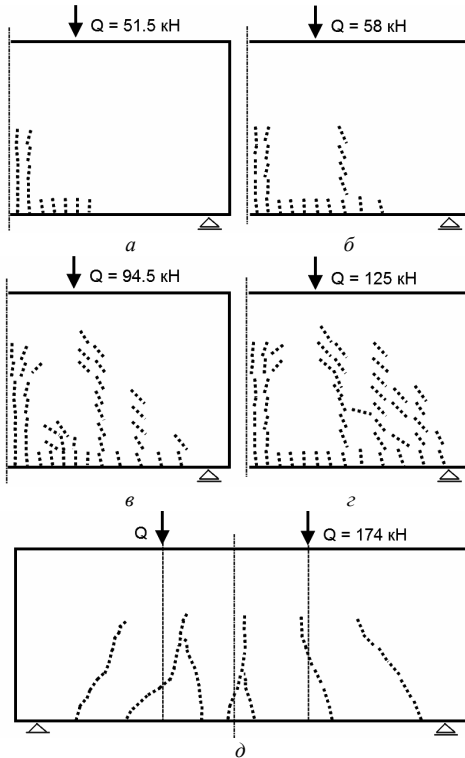


Рис. 5. Розвиток тріщиноутворення ( $a \div г$  – чисельне моделювання,  $д$  – експеримент)

Руйнування бетону починається в нижній центральній частині конструкції (рис. 5,а). В межах фрагмента, де відсутнє армування, зона тріщиноутворення прогресує по товщині вздовж осі симетрії подібно магістральній тріщині. А у фрагменті з наявністю поздовжньої арматури утворення тріщин не спричиняє розвантаження бетону в сусідніх областях і зона тріщин з невеликим кутом нахилу до вертикалі розташовується вздовж стрижня в горизонтальному напрямку до опори. Потім, на відстані  $1/4$  прольоту від осі симетрії з'являється друга зона магістральних тріщин, яка стрімко просувається по товщині на таку ж висоту, як і зона тріщиноутворення біля осі симетрії (рис. 5,б). Подальше навантаження веде до появи третьої зони вертикальних магістральних тріщин на відстані  $1/7$  прольоту від краю балки-стілки (рис. 5,в). Дві області тріщин, що з'явилися на той час, розвивалися в напрямку до місця прикладання навантаження. Наступні етапи характеризуються появою

похилих тріщин біля опори, які просувалися до навантаженої області (рис. 5,з).

Порівняння характеру тріщиноутворення, зафіксованого в експерименті (рис. 5,д), і розрахункових картин тріщин (наприклад, рис. 5,е) свідчить про їх добре узгодження на половині прольоту.

Слід однак визнати, що руйнування бетону по результатам розрахунку проходило більш інтенсивно ніж у реальному експерименті. Це призвело до того, що отримане на основі розрахунків граничне навантаження виявилось менше за експериментальне і забезпечило запас міцності деяким більше 20%.

З усіх розглянутих факторів, тріщиноутворення проявляє найбільший вплив на піддатливість досліджуваної конструкції балки-стілки, яке будемо оцінювати як відношення характерного прогину  $U_A$  відповідного до величини навантаження  $Q$ .

На початку навантаження це відношення дорівнювало  $3.46 \cdot 10^{-4} \text{ см/кН}$ . Перед початком утворення тріщин  $U_A/Q = 3.62 \cdot 10^{-4} \text{ см/кН}$  (збільшення лише на 4.6%), а безпосередньо перед вичерпанням несучої здатності  $U_A/Q = 6.28 \cdot 10^{-3} \text{ см/кН}$ , що на порядок більше початкового значення  $U_A/Q$ .

### Висновки

Отже, використання теорії деформування залізобетону із тріщинами М.І. Карпенко та функції  $\psi_s(\epsilon_s)$  у вигляді, встановленому на основі попередніх розрахунків, дозволило достовірно та ефективно моделювати нелінійну роботу конструкції від початку утворення тріщин до вичерпання нею несучої здатності.

Результати розрахунків, очевидно, можна ще більше наблизити до експериментальних даних, якщо вдосконалити теорію деформування залізобетону із тріщинами в частині опису опору арматурних стрижнів зрушенню берегів тріщин. Однак моделювання роботи реальних споруд при такому значному ступені руйнування не представляється доцільним.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Солодей І.І.* Напіваналітичний кільцевий скінченний елемент для моделювання просторового напруженого стану армованих тіл з тріщинами // Опір матеріалів і теорія споруд. –К.:КНУБА, Вип.91, 2013.-с.147-156.
2. *Гуляр О.І., Лізунов П.П., Солодей І.І.* Математичні моделі появи та розповсюдження зон руйнування кругових неоднорідних дисперсно-армованих тіл // Опір матеріалів і теорія споруд. –К.:КНУБА, Вип.90, 2012.-с.94-112.
3. *Гараи Т.* Исследование анкеровки арматуры в бетоне // Исследование прочности элементов железобетонных конструкций. – М.: Тр./НИИЖБ, 1959. – Вып. 5. – с.78-109.

4. Доценко А.В. Работа железобетонных балок стенок при длительных знакопеременных нагрузках. – Дис. канд. тех. наук., 05.23.01 – строительные конструкции, Киевский инженерно-строительный институт. – Киев, 1986. – 203 с.
5. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975, - 541 с.
6. Карпенко Н.И. Теория деформирования железобетона с трещинами. – М.: Стройиздат, 1976. – 208 с.
7. Карпенко Н.И. К построению теории расчета массивных железобетонных конструкций с учетом трещинообразования // Строит. мех. и расчет сооруж. – 1980. - № 2. – с.28-35.
8. Кислюкий В.Н., Козак А.Л., Отрашевская В.В. и др. ПРОЧНОСТЬ-75. Система математического обеспечения расчетов пространственных конструкций. Т.12. Раздел КОМБИК. Исследование оболочечных и комбинированных конструкций. – Киев, 1975. – 108 с. – Рукопись деп. в РФАП АН УССР, № 3884.
9. Новое в проектировании бетонных и железобетонных конструкций / Под ред. А.А. Гвоздева. – М.: Стройиздат, 1978. – 208 с.
10. Новое о прочности железобетона / Под ред. К.В. Михайлова. – М.: Стройиздат, 1977. – 272 с.
11. Пересыпкин Е.Н. Расчет стержневых железобетонных элементов. – М.: Стройиздат, 1988. – 168 с.
12. Прочность, структурные изменения и деформация бетона / Под ред. А.А. Гвоздева. – М.: Стройиздат, 1978. – 297 с.
13. СНиП 2.03.01.84. Бетонные и железобетонные конструкции / Госстрой СССР. –М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1985. – 79 с.
14. Шматков С.Б., Казанцев Е.Ю. Слоистая модель железобетонной пластинки и ее использование для расчета плитных фундаментов // Конструкции и методы расчета зданий сельскохозяйственного назначения. – М.: ЦНИИЭПС, 1988. – с.37-48.

## REFERENCES

1. Bazhenov V.A., Gulyar O.I., Solodei I.I. Napivanalitychnyy kil'tsevyi skinchennyi element dlya modelyuvannya prostorovoho napruzhenoho stanu armovanykh til z trishchynamy (Semi-analytical circular finite element to model 3d stress state of reinforced solids with cracks) // Strength of materials and structural theory. –К.:KNUSA, N 91, 2013. -pp.147-156.
2. Gulyar O.I., Lizunov P.P., Solodei I.I. Matematychni modeli poyavy ta rozpovsyudzhennya zon ruynuvannya kruhovykh neodnorodnykh dyspersno-armovanykh til (The numerical models of initiation and development of fracture zones for reinforced heterogeneous solids of revolution) // Strength of materials and structural theory. –К.:KNUSA, N 90, 2012. -pp.94-112.
3. Garai T. Issledovanie ankerovki armatury v betone (Study of anchorage of reinforcement in concrete) // Investigation of the Strength reinforced concrete structures. – М.: RSRI, 1959. – N 5. – pp.78-109.
4. Docenko A.V. Rabota zhelezobetonnykh balok stенок pri dlitelnykh znakoperemennykh nagruzokakh (State of reinforced concrete beam-walls under long alternating loads). – PhD, 05.23.01 – constructions, KNUSA. – Kyiv, 1986. – 203 p.
5. Zenkevich O.K. Metod konechnykh elementov v tekhnike (The finite element method in the engineering). – М.: Mir, 1975, - 541 p.
6. Karpenko N.I. Teoriya deformirovaniya zhelezobetona s treshchynamy (Deformation theory of reinforced concrete with cracks). – М.: Stroyizdat, 1976. – 208 p.
7. Karpenko N.I. K postroeniyu teorii rascheta massivnykh zhelezobetonnykh konstruksiy s uchetoм treshchynoobrazovaniya (The theory of calculation of massive concrete structures subject to cracking) // Structural mechanics and analysis of structure. – 1980. – N 2. – pp.28-35.
8. Kislookiy V.N., Kozak A.L., Otrashhevskaya V.V. et al. PROCHNOST'-75. Sistema matematicheskogo obespecheniya raschetov prostranstvennykh konstruksiy (PROCHNOST'-75. System software of computation of 3D constructions). Т.12. Paragraph КОМБИК. Study of shell and combined designs. – Kyiv, 1975. – 108 p., N 3884.

9. Novoe v proektyrovanyy betonnykh i zhelezobetonnykh konstruksyy (New in the design of concrete and reinforced concrete structures) / A.A. Hvozdev. – М.: Stroyizdat, 1978. – 208 p.
10. Novoe o prochnosty zhelezobetona (New results in the strength of concrete) / K.V. Mykhaylov. – М.: Stroyizdat, 1977. – 272 p.
11. *Peresypkin E.N.* Raschet sterzhnevyykh zhelezobetonnykh elementov (Calculation of reinforced concrete core bits and pieces). – М.: Stroyizdat, 1988. – 168 p.
12. Prochnost', strukturnye izmeneniya i deformatsyya betona (Strength, structural changes and deformation of concrete) / A.A. Hvozdev. – М.: Stroyizdat, 1978. – 297 p.
13. SNIP 2.03.01.84. Betonnye i zhelezobetonnye konstruksyy (SNIP 2.03.01.84. Concrete and reinforced concrete structures) / State building USSR. –М.: CIMD, 1985. – 79 p.
14. *Shmatkov S.B., Kazantsev E.Y.* Sloistaya model' zhelezobetonnoy plastinki i eyo ispol'zovanie dlya rascheta plitnykh fundamentov (Layered model of reinforced concrete plates and its use to calculate the slab foundation) // Design and calculation methods of buildings for agricultural purposes. – М.: CSRDIPB, 1988. – pp.37-48.

*Стаття надійшла до редакції 02.12.2013 р.*

*Лизунов П.П., Гуляр А.И., Солодей И.И.*

#### **УНИВЕРСАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

Разработан численный алгоритм и реализующие его программные средства для исследования нелинейного деформирования и трещинообразования пространственных железобетонных конструкций. Используется метод конечных элементов. Численное моделирование нелинейного деформирования и разрушения материалов выполняется согласно феноменологическим теориям. Алгоритм расчета основан на методе Ньютона-Канторовича. Достоверность результатов подтверждена путем сравнения с экспериментальными данными и численными расчетами, выполненными с использованием других методик.

**Ключевые слова:** железобетонные пространственные конструкции, нелинейное деформирование, трещинообразование, феноменологические теории, метод конечных элементов.

*Lizunov P.P., Gulyar O.I., Solodei I.I.*

#### **UNIVERSAL ALGORITHM OF NONLINEAR PROCESS NUMERICAL MODELLING OF REINFORCED CONSTRUCTION DEFORMATION**

A numerical algorithm and software tools for the study of nonlinear deformation and fracture spatial concrete structures are developed. Finite element method is used. Numerical simulation of nonlinear deformation and fracture of materials is performed according to the phenomenological theories. Calculation algorithm is based on the Newton-Kantorovich method. The accuracy of the results was confirmed by comparison with experimental data and numerical calculations performed using other methods.

**Key words:** reinforced concrete 3D structure, nonlinear deformation, crack formation, phenomenological theories, finite element method